

利用 Green-Naghdi 模型对直墙前立波的数值模拟

苏高飞, 勾莹, 滕斌

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116024, Email: su.gf@outlook.com)

摘要: 直墙是港口工程中重要的结构形式, 关于直墙前波浪力的研究一直是人们关注的重点。本文通过建立完全非线性的 Green-Naghdi 方程时域求解模型(GN 模型)对有限水深直墙前立波进行模拟研究。模型使用有限差分数值方法进行控制方程的离散并建立二维数值波浪水槽, 采用流函数造波法进行入射波浪的模拟, 利用高阶预测-校正法进行时间的步进。文中给出了利用 GN 模型对不同波况下直墙前立波的波面形状, 墙面上波压力沿水深的分布以及最大波压力的具体模拟结果。文中将 GN 模型的对立波数值模拟结果与三阶摄动展开法、Fourier 数值法得到的计算结果以及相关的实验数据进行对比, 对 GN 模型数值模拟结果的适用性与准确性进行了验证。

关键词: Green-Naghdi 模型; 立波; 有限水深; 波压力

1 引言

港口工程中的防波堤、码头、护岸等建筑物通常由直墙结构构成, 而直墙上的波浪荷载通常是这些建筑物设计时所考虑的主要外荷载。外海来浪传至近岸遇到直墙发生反射, 因此直墙前波浪往往呈现立波形态。由于立波具有时间上的周期性和空间上的对称性, 人们关于立波的研究具有较长的历史, 也有了较为丰富的理论与实验经验积累。其中基于拉格朗日法的 Sainflou 立波压力公式形式较为简单, 因此在实际工程设计时得到普遍使用。但是在相对水深较大时, 由 Sainflou 公式给出的波压力往往大于实验测量结果。Penney 和 Price^[1]推导了深水情况下立波的五阶近似解, 对立波的极限波陡进行了研究, 他们发现极限波陡时波峰将呈现直角形状。而针对有限水深的情况, Tadjbakhsh 和 Keller^[2]采用摄动展开法得到了三阶立波近似解。随后 Goda^[3]利用摄动展开法进一步推导了四阶立波计算公式, 同时进行了大量的物理模型实验对直墙前立波进行了详细研究。但发现在水深较浅或波陡较大时, 四阶公式得到的自由水面处波压力明显不为零, 即自由水面存在剩余压力。Tsai 和 Jeng^[4]则采用 Fourier 数值法对有限水深的立波进行模拟, 该方法采用截断傅里叶级数对立波速度势函数进行展开, 而波面函数作为隐函数参与计算, 因此该方法完全满足非线性

的自由表面边界条件，很好地解决了自由表面存在残余压力的问题。

针对立波的理论研究中 Fourier 数值法已经比较成熟，然而在实际海洋中立波只是一种极为特殊的波浪形态，因此有必要建立一种既能对立波进行模拟研究又能扩展到变化地形上波浪与结构物相互作用的数值模型。在众多波浪理论中，Green-Naghdi 理论能够精确满足自由水面边界条件，可以用来分析变化地形上强非线性的波浪问题，因此本文将基于 GN 理论建立数值模型用于直墙前立波的模拟研究。GN 理论的基本思想是对流体运动在垂向上的分布形式进行合理假设，并根据假设速度分布对流体域进行垂向积分保证流体运动守恒定律的满足。不同于传统的摄动理论，GN 理论在推导过程中并没有引入任何小参数，其精度通过速度分布假设的复杂程度(GN 方程的级别)来控制。Green-Naghdi 理论最先由 Green 等^[5]提出并将其用于流体力学问题。随着 Ertekin 等^[6]成功将 GN 理论用于浅水中运动船体兴波问题的研究，GN 理论开始广泛应用非线性水波问题的分析研究。Demirbilek 和 Webster^{[7][8]}推导了浅水 GN-2 模型并对二维非线性波浪进行了数值模拟。Zhao 等^[9]将 GN 模型应用于三维波浪传播变形的研究。Webster 等^[10]使用一种更简单的方法对 GN 理论进行重新推导得到了更为简化的表达形式，使得高级别 GN 理论的数值实现成为可能。Zhao 等^[11]使用高级别的 GN 模型对二维波浪传播问题进行了数值模拟。

首先在第二部分对二维浅水 GN 理论进行了简单介绍，然后在第三部分说明了 GN 模型的数值求解方法，在第四部分中利用二维数值模型对有限水深立波的相关特性进行了分析，最后在第五部分对本文的内容进行了总结。

2 二维浅水 GN 理论

当行进波浪正向遇到直墙式结构物时发生反射，反射波与入射波相互叠加形成立波的现象可以视作二维波动问题。使用二维 GN 理论对该问题进行分析研究，假设流体为无黏的理想流体，在静水面上建立直角坐标系， x 轴水平向右， z 轴竖直向上。则海底边界为 $z=-h(x)$ ，而自由水面为 $z=\eta(x,t)$ 。

GN 理论的核心思想是对流体质点速度的垂向分布进行假设，将垂向坐标进行变量分离，如公式(1)所示。

$$\begin{cases} u(x,z,t) = \sum_{n=0}^K u_n(x,t)\lambda_n(z) \\ w(x,z,t) = \sum_{n=0}^K w_n(x,t)\lambda_n(z) \end{cases} \quad (1)$$

其中， (u,w) 为空间点处流体质点的水平和垂向速度， u_n 和 w_n 分别为水平和垂向速度系数，是水平坐标和时间的函数，为未知量。 λ_n 为速度的垂向分布函数，仅是垂向坐标的函数，形式已知。 K 为 GN 理论的级别， K 取值的不同，最终将得到不同精度的 GN 方程。

根据具体的应用情况，垂向分布函数可以有不同的形式。由于港口工程的建筑物多建在近岸浅水区域，因此本文将使用浅水 GN 理论对立波进行模拟，根据 Demirbilek 和 Webster^[7]的研究，此时速度沿水深方向按多项式的形式变化，速度分布函数应取

$$\lambda_n = z^n \quad (2)$$

将速度假设代入无粘流体运动的基本控制方程和边界条件，经过推导便可得到 GN 方程，这里直接给出二维浅水情况下的 GN 方程，具体推导过程参考 Webster 等^[10]的文章。

由自由表面运动学边界条件可以得到波面控制方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \sum_{n=0}^K \eta^n \left(w_n - \frac{\partial \eta}{\partial x} u_n \right) \quad (3)$$

其中 η 为波面函数。

由动量守恒方程并经过垂向积分可以得到关于水平速度系数的控制方程

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_n + gS_n) + nE_{n-1} - \alpha^n \frac{\partial}{\partial x} (G_0 + gS_0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

其中

$$E_n = \sum_{m=0}^K \left[\frac{\partial u_m}{\partial t} S_{mn} + \sum_{r=0}^K \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} u_r \right) S_{mrn} + \sum_{r=0}^K u_m w_r S_{rn}^m \right] \quad (5)$$

$$G_n = \sum_{m=0}^K \left[\frac{\partial w_m}{\partial t} S_{mn} + \sum_{r=0}^K \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} u_r \right) S_{mrn} + \sum_{r=0}^K w_m w_r S_{rn}^m \right] \quad (6)$$

$$S_n = \frac{1}{n+1} [\eta^{n+1} - (-h)^{n+1}] \quad (7)$$

$$S_{mn} = \frac{1}{m+n+1} [\eta^{m+n+1} - (-h)^{m+n+1}] \quad (8)$$

$$S_{mrn} = \frac{1}{m+r+n+1} [\eta^{m+r+n+1} - (-h)^{m+r+n+1}] \quad (9)$$

$$S_{rn}^m = \frac{m}{m+r+n} [\eta^{m+r+n} - (-h)^{m+r+n}] \quad (10)$$

由质量守恒公式可以得到水平速度分布系数与垂向速度分布系数之间的关系

$$u_K = 0 \quad (11)$$

$$w_0 = - \sum_{n=1}^K \alpha^n \left(w_n - \frac{\partial \alpha}{\partial x} u_n \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} u_0 \quad (12)$$

$$w_n = -\frac{1}{n} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \quad n=1,2,\dots,K \quad (13)$$

采用公式(11)对水平速度分布系数处理的 GN 模型, 又称为 GN 限制模型, Demirbilek 和 Webster^[7]对此处理方法给出了详细的讨论, 这里不再进行展开说明。

3 数值方法

本文采用有限差分的数值方法对 GN 理论的控制方程进行求解。由波面控制方程可以直接得到波面变化的时间导数, 而动量方程中的速度系数同时含有时间和空间的偏导, 不能直接进行求解, 将公式(4)整理成矩阵形式为

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{U}_{t,xx} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{U}_{t,x} + \bar{\mathbf{C}}\mathbf{U}_t = \mathbf{f} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{U}=(u_0, u_1, \dots, u_{K-1})^T$ 为速度系数的向量形式。U 的下角标 t 和 x 分别表示速度系数对时间和空间的偏导数。 $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{B}}$ 和 $\bar{\mathbf{C}}$ 为 $K \times K$ 大小的矩阵, $\mathbf{f}$ 为长度 K 的向量。

该问题在空间上为边值问题, 模型中用 n 个网格节点将流体区域划分为 $n-1$ 份, 网格长度为 Δx , 即第 i 个网格节点的空间位置为 $x_i=(i-1)\Delta x$ 。而在时间上该问题为初值问题, 时间积分时的时间间隔为 Δt , 即第 j 个时间步对应的时刻为 $t_j=j\Delta t$ 。则任一网格节点处任一时刻的速度系数可以表示为 $\mathbf{U}(x_i, t_j)$, 用 $\mathbf{U}^{(i,j)}$ 表示。

本文使用五点中心差分法对变量的空间导数进行处理, 则方程(14)将变为

$$\mathbf{A}^{(i,j)}\mathbf{U}_t^{(i-2,j)} + \mathbf{B}^{(i,j)}\mathbf{U}_t^{(i-1,j)} + \mathbf{C}^{(i,j)}\mathbf{U}_t^{(i,j)} + \mathbf{D}^{(i,j)}\mathbf{U}_t^{(i+1,j)} + \mathbf{E}^{(i,j)}\mathbf{U}_t^{(i+2,j)} = \mathbf{f}^{(i,j)} \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{A}^{(i,j)} = -\bar{\mathbf{A}}^{(i,j)} \frac{1}{12\Delta x^2} + \bar{\mathbf{B}}^{(i,j)} \frac{1}{12\Delta x} \quad (16)$$

$$\mathbf{B}^{(i,j)} = +\bar{\mathbf{A}}^{(i,j)} \frac{16}{12\Delta x^2} - \bar{\mathbf{B}}^{(i,j)} \frac{8}{12\Delta x} \quad (17)$$

$$\mathbf{C}^{(i,j)} = -\bar{\mathbf{A}}^{(i,j)} \frac{30}{12\Delta x^2} + \bar{\mathbf{C}}^{(i,j)} \quad (18)$$

$$\mathbf{D}^{(i,j)} = +\bar{\mathbf{A}}^{(i,j)} \frac{16}{12\Delta x^2} + \bar{\mathbf{B}}^{(i,j)} \frac{8}{12\Delta x} \quad (19)$$

$$\mathbf{E}^{(i,j)} = -\bar{\mathbf{A}}^{(i,j)} \frac{1}{12\Delta x^2} - \bar{\mathbf{B}}^{(i,j)} \frac{1}{12\Delta x} \quad (20)$$

由方程(15)可以得到一个带状五对角线性方程组, 该方程组的具体求解方法可以参考 Zhao 等^[11]的文章。

GN 理论具有强非线性波浪的模拟能力, 因此本文的数值模型中采用 Fenton^[12]提出的

流函数造波法生成完全非线性波浪的。由于控制方程中的未知量为速度系数，所以在生成波浪的速度场后，需要进一步采用最小二乘法拟合得到模型中直接参与计算的速度系数。本文所建立的数值模型在时间积分时采用具有四阶精度的 Adams-Bashforth-Moulton 预测-校正方法，即首先通过四步外插法对结果进行预测，然后再通过三步内插法对预测结果进行修正。

4 数值结果

与三阶摄动法^[2]和 Fourier 数值法^[4]可以直接对立波进行模拟研究不同，GN 模型在模拟立波时需要建立二维波浪水槽，如图 1 所示。首先在水槽左侧的造波边界生成波高为 H_i ，波长为 L ，周期为 T 的入射波，当从左向右传播的入射波遇到直墙后发生反射，反射波与入射波叠加形成波高为 H 的立波。数值波浪水槽长为 $7L$ ，左端布置长度为 L 的阻尼区，用于吸收反射波，避免对入射波的生成产生影响，右端设置为全反射的固壁边界条件。模型计算时设置网格大小为 $\Delta x=L/200$ ，时间步的大小为 $\Delta t=T/250$ 。本文的数值结果均为使用 GN-3 模型，计算 30 个周期后的稳定结果。

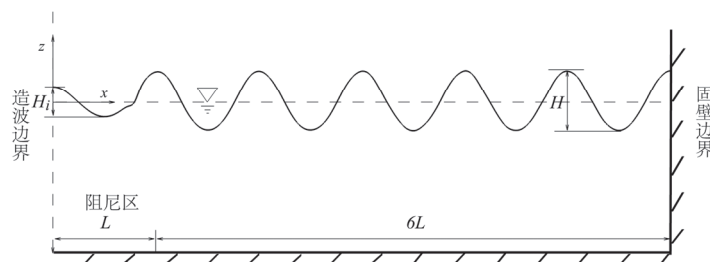


图 1 数值波浪水槽示意图

4.1 立波波形

这里分别利用三阶摄动法，Fourier 数值法和 GN 模型生成立波并对立波的波面形状进行对比分析。图 2 中分别是水深为 $h/L=0.2$ 、 0.02 ，立波波高为 $H/h=0.1$ 的波况下，3 种方法所生成立波振荡达波峰最高时半个波长的波面升高。由图 2(a)可以看出，在水深较深时 3 种方法得到的波面形状吻合较好，都呈现出很好的正弦函数形状。而从图 2(b)可以看出，在水深较浅时 GN 模型所得立波波面与 Fourier 数值法依然具有很好的重合性，波面呈现尖峰坦谷状，但三阶摄动法的结果却发生偏差，在波谷附近出现明显的波动现象。

三阶摄动法在浅水区域出现误差的原因在于，该方法在推导过程中仅以波陡(H/L)作为小参数进行摄动展开，而在水深由深变浅的过程中，相对水深(h/L)也将成为小量，并使高阶分量迅速增大超过低阶量，这与摄动展开法中高阶量远远小于低阶量的基本假设相违背。

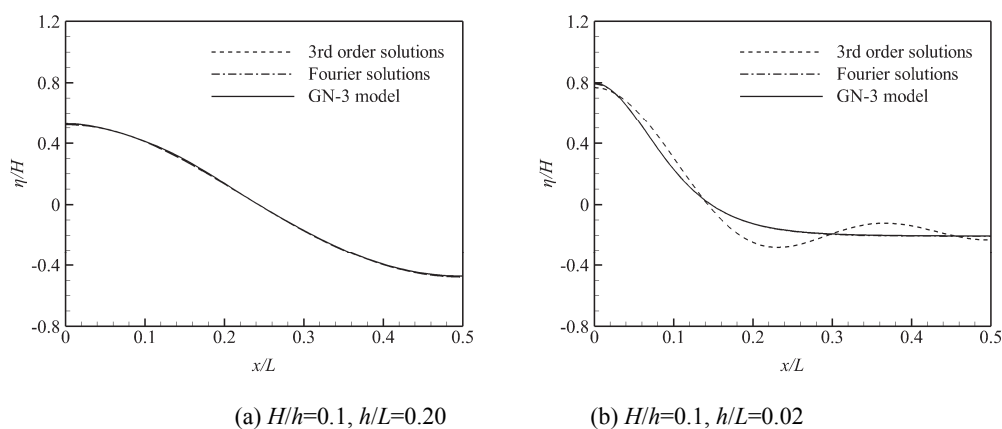


图2 波峰最高时半波长波面形状

4.2 墙面动水压强

针对上节中不同水深的两种波况，图3中给出立波波峰最高时墙面上动水压强的沿水深的分布情况。可以看到对于深水情况，3种方法得到的压强分布基本相同。而对于浅水情况，由于三阶摄动方法在浅水时不再适用，其压强沿水深的分布在静水面以下明显偏离Fourier数值法和GN模型的结果。

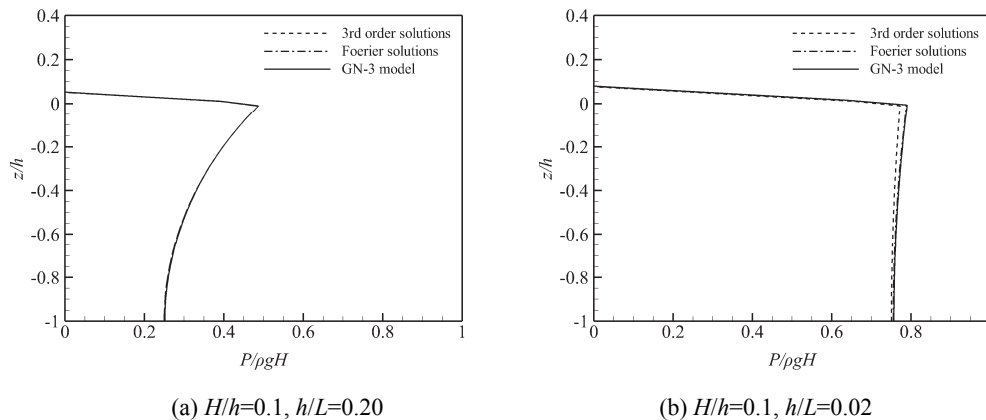


图3 立波波峰最高时墙面动水压强沿水深的分布

另一方面，图4给出了3种方法所得立波自由表面处剩余压强 P_r 在半个周期范围内的变化情况。从图中可以看出，由于GN理论和Fourier数值法在推导过程中精确满足自由水面边界条件，所以两者所得立波在水面处的剩余压力始终保持为零。而三阶摄动法在推导过程中舍弃了自由表面条件中的高阶项导致自由表面处存在剩余压力，并且在水深较浅时表现的更加显著。

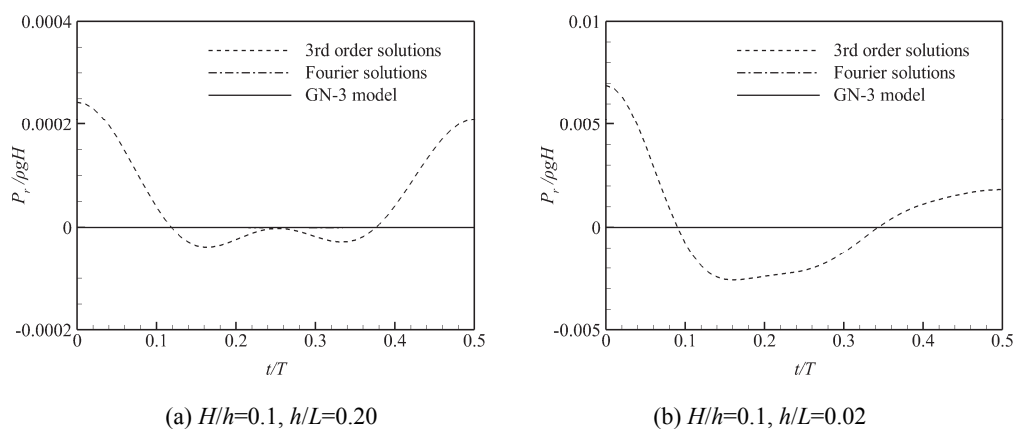


图4 自由水面剩余压力在半个周期上的变化

4.3 墙面波压力

通过对墙面上动水压强的积分可以得到墙面上动水压力的大小，图5给出了立波波高 $H/h=0.1$ 情况下墙面上正向最大动水压力随无因次水深的变化情况。从图5中可以看出 GN 模型和 Fourier 数值法的结果吻合良好，在 $kh < 2$ 的水深范围内，当水深由浅到深逐渐变化时墙面所受无因次最大正压力逐渐减小。

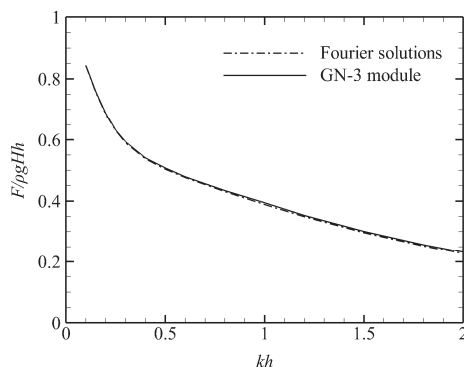


图5 墙面最大正压力随水深的变化

另一方面，通过一组算例对 $h/L=0.052$ 的浅水情况下，墙面上最大正压力随波高的变化进行了分析，并将 Fourier 数值法和 GN 模型的模拟结果与 Goda^[10] 的实验数据进行对比，如图6所示。可以发现在浅水情况下 GN 模型与 Fourier 数值法均能对墙面所受最大正压力进行很好的预测。其中在 $H/h < 0.25$ ，即波高相对较小时，GN 模型的结果与 Fourier 方法的结果具有很好的一致性，而在波高较大时，GN 模型的结果与 Fourier 方法存在偏差，尤其在 $H/h > 0.35$ 时，所建立的浅水 GN 模型将不能得到稳定的立波。

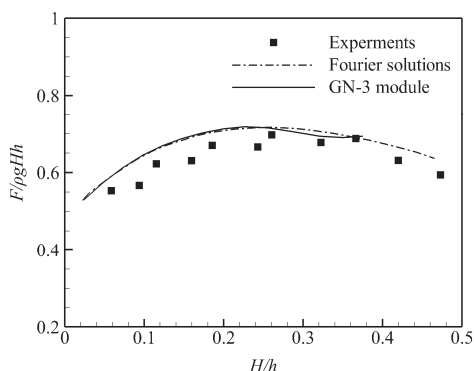


图6 墙面最大正压力随波高的变化

5 结论

利用二维浅水 GN 理论建立数值水槽模型对直墙前的立波进行模拟研究,并将数值结果与有限水深三阶摄动法、Fourier 数值法的结果以及有关实验数据进行对比。从立波波形的对比结果中可以看出在有限水深特别是浅水的情况下,GN 模型和 Fourier 数值法能够很好地对立波的波面形状进行预测,而三阶摄动法的波面在波谷附近出现波动。由于 GN 理论和 Fourier 数值法能够很好的满足非线性的自由水面边界条件,所以这两种方法得到的立波在自由水面处均没有剩余压力,立波波峰最高时墙面上动水压强沿水深的分布情况也基本一致。但是三阶近似解则在水面处存在明显的剩余压力,而且只能在水深较深时给出准确的压强沿水深分布。最后,对墙面所受最大正压力的分析可以看出,在 $kh < 2$ 的水深范围内 GN 模型的结果和 Fourier 方法基本一致,随着水深的增大墙面所受无因次最大正压力逐渐减小。而对于 $h/L=0.052$ 浅水情况时,GN 模型也能在较大的波高范围内对墙面所受最大正压力进行预测。

通过对立波的分析研究可以看出,本文所建立二维 GN 模型可以准确地模拟立波与直墙的相互作用问题。而由于 GN 理论具有模拟大面积变化地形上波浪传播变形的能力,GN 模型可以更广泛地用于近岸波浪与结构物相互作用的研究。

致谢

特别感谢哈尔滨工程大学赵彬彬教授对于本文研究工作所提供的支持与指导。

参考文献

1. Martin J C, Moyce W J, Penney W G, et al. Some gravity wave problems in the motion of perfect liquids[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1952, 244(882).
2. Tadjbakhsh I, Keller J B. Standing surface waves of finite amplitude[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2006, 8(03): 442-451.
3. Goda Y. The fourth order approximation to the pressure of standing waves. Coastal Engineering in Japan, 1967, 10: 1-11.
4. Tsai C P, Jeng D S. Numerical Fourier solutions of standing waves in finite water depth[J]. Applied Ocean Research, 1994, 16(3): 185-193.
5. Green, A, E, et al. On the Theory of Water Waves[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, 1974, 338(1612): 43-55.
6. Ertekin RC, Webster WC, Wehausen JV. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 169: 275-292.
7. Demirbilek Z, Webster WC. Application of the Green-Naghdi theory of fluid sheets to shallow-water waves, report 1, model formulation. US Army Waterway Experiment Station, Coastal Engineering Research Center, Technical Report No. CERC-92-11, 1992.
8. Demirbilek Z, Webster W C. The Green-Naghdi theory of fluid sheets for shallow water waves. Developments in Offshore Engineering, Gulf Professional Publishing, 1999, 1-54.
9. Zhao BB, Duan WY, and Webster WC. A Note on Three-Dimensional Green-Naghdi Theory. The 25th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies (25th IWWF), Harbin, China, 2010.
10. Webster W C, Duan W, Zhao B, et al. Green-Naghdi Theory, Part A: Green-Naghdi (GN) Equations for Shallow Water Waves[J]. Journal of Marine Science and Application, 2011, 10(3): 253-258.
11. Zhao BB, Duan WY, Ertekin RC, Application of higher-level GN theory to some wave transformation problems[J]. Coastal Engineering, 2014, 83: 177-189.
12. Fenton J. The numerical solution of steady water wave problems[J]. Computers & Geosciences, 1988, 14(3): 357-368.

Numerical simulation of standing waves in front of a vertical wall using Green-Naghdi model

SU Gao-Fei, GOU Ying, TENG Bin

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian, 116024.

Email: su.gf@outlook.com)

Abstract: Vertical wall is an important structural form in port engineering. The force exerted on vertical walls due to the action of standing waves has always been the focus of attention. In this paper, the full nonlinear Green-Naghdi equations time-domain solution model (GN model) is established to simulate the standing wave in front of a vertical wall. The finite difference method is used to discretize the governing equations and a two-dimensional numerical wave tank is established. The stream-function theory is used to generate the incident wave, and a high-order predictor- corrector iterative scheme is used for time stepping. The properties of standing waves in water of finite depth, including the surface profiles, the distribution of wave pressure along the water depth and wave forces on the walls are then calculated by using GN model. The numerical simulation results of the GN model are compared with the third-order perturbed solutions and Numerical Fourier solutions, so as to verify the applicability and accuracy of the numerical simulation results of the GN model.

Key words: Green-Naghdi model; Standing wave; Finite water depth; Wave force.

浅水波(Whitham-Broer-Kaup)方程的一些新解

王雅吉¹, 徐航¹, 吴瀚杰², 郭维浩², 沈钰修²

(1. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 海洋工程国家重点实验室,

上海 200240, Email:hangxu@sjtu.edu.cn;

2. 上海市闵行中学, 上海 200240)

摘要: 本文对浅水波数学模型 Whitham-Broer-Kaup (WBK) 方程进行分析求解, 以黎卡提方程为基础, 应用一种全新的转换方法, 从而求得 WBK 方程的多个新解。期待这些解能够增强我们对此类浅水波的认识, 同时加深我们对非线性水波的理解。为海洋工程中波浪载荷的研究、复杂海况海啸波传播的数值模拟等提供相应的理论指导。同时此方法可扩展到其他非线性方程中去, 对各种工程和应用科学领域的研究都具有重大的意义。

关键词: WBK 方程; 黎卡提方程; 非线性水波; 海啸波

1 引言

非线性演化方程 (NEE) 的精确行波解一直是数学家和物理学家的主要关注点。这些解决方案描述了物理学和其他领域的各种现象, 例如流体力学、气象学、生命科学等^[1]。非线性波动系统的数值解和精确解对学习物理现象起着重要作用, 且精确解比数值解可以用来更好地理解这些现象。科学家们已经提出了许多数学模型来描述浅水波方程, 例如 Camassa-Holm 方程^[2]、Dullin-Gottwald-Holm 方程^[3]、Whitham-Broer-Kaup 方程^[4]、Degasperis-Procesi 方程^[5] Korteweg-de Vries 方程^[6]等。其中, 因为 WBK 方程可以较好地描述扩散波, 所以我们选取 Whitham-Broer-Kaup (WBK) 方程来进行求解。

用于描述浅水非线性波的 Whitham-Broer-Kaup 方程为

$$\begin{cases} u_t + uu_x + v_x + \beta u_{xx} = 0 \\ v_t + (uv)_x + \alpha u_{xxx} - \beta v_{xx} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, u 为水平速度, v 为偏离水面平衡位置的高度, α 和 β 分别是表示不同扩散能力的常

数。式中, 当 $\alpha=0, \beta \neq 0$ 时, 方程组(1)为经典长波方程, 描述具有扩散能力的浅水波^[7]。若 $\alpha=1, \beta=0$, 则方程组(1)为修正的 Boussinesq 方程^[8]。而当 $\alpha=0, \beta=0$, 方程组(1)为平底上的一维浅水方程^[12]。将方程组(1)应用如下的缩放变换,

$$u(x, t) = u(\theta), v(x, t) = v(\theta), \theta = x + \lambda t + c \quad (2)$$

然后 WBK 方程就可以变换为

$$\begin{cases} \lambda u' + uu' + v' + \beta u'' = 0 \\ \lambda v' + (uv)' + \alpha u''' - \beta v'' = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, λ 代表波速, c 表示不同的相位值。

2 求解非线性浅水波的新方法

在过去的几十年里, 科学家们采用了很多方法来研究 WBK 方程, 其中包括逆变换公式法^[9], 改进的正弦余弦法^[10], 第一积分法^[11], 双曲函数法^[12], 非经典对称法^[13]等。本文中采用的方法以黎卡提方程为基础进行变换, 步骤如下:

(1) 根据 Murata 的求解^[14], 采用如下变换:

$$u(\theta) = \sum_{i=1}^m \omega^{i-1}(\theta) [A_i \omega(\theta) + B_i \sqrt{\mu_1(1+\mu_2 \omega^2(\theta))}] + A_0 \quad (4.1)$$

$$v(\theta) = \sum_{i=1}^n \omega^{i-1}(\theta) [a_i \omega(\theta) + b_i \sqrt{\mu_1(1+\mu_2 \omega^2(\theta))}] + a_0 \quad (4.2)$$

其中, $A_i, B_i, a_i, b_i (i=0, 1, 2, \dots)$ 是常数, 可通过后续求解的出其准确值, $\mu_1 = \pm 1, \mu_2 = \pm 1$, $\omega(\xi)$ 为扰动函数, 其函数可以表示为

$$\omega'(\theta) = 1 + \mu_2 \omega^2 \quad (5)$$

从而得到的 $\omega(\xi)$ 展开为

$$\begin{cases} \omega(\theta) = \tanh[\sqrt{-\mu_2}(R\theta + C)] (\mu_2 < 0) \\ \omega(\theta) = \frac{\tan[\sqrt{\mu_2}(R\theta + C)]}{\sqrt{\mu_2}} (\mu_2 > 0) \end{cases} \quad (6)$$

其中, R, C 为任意常数, 此处, m 和 n 是通过控制方程的最高偏微分阶数来确定的, 因此为了平衡方程左右两边, 我们取 m 为 1, n 为 2, 方程组(4)即可变换为一组具体表达式, 如下所示:

$$u(\theta) = A_0 + A_1 \omega + B_1 \sqrt{\mu_1(1+\mu_2 \omega^2)} \quad (7.1)$$

$$v(\theta) = a_0 + a_1\omega + b_1\sqrt{\mu_1(1+\mu_2\omega^2)} + a_2\omega^2 + b_2\omega\sqrt{\mu_1(1+\mu_2\omega^2)} \quad (7.2)$$

我们可知应用此方法进行 WBK 方程求得一系列解^[15], 然而他们在求解过程中出现一些错误, 导致得到的解出现错误, 为了改正他们的求解, 我们应用同样的变换重新进行一次求解。把得到的方程组 7 代入到 WBK 方程中, 得到一系列的等式, 然后令方程左边每一个系数均为 0, 使得方程成立。利用软件 Mathematica 进行求解, 最终求得每个常数的值。通过计算求得共有 32 个解, 紧接着对求得的每个解进行分类, 可以得到 4 个典型的解:

Case1:

$$\mu_1 = \pm 1, \mu_2 = 1, a_1 = b_1 = b_2 = B_1 = 0, A_0 = -\lambda, A_1 = -2R\sqrt{\alpha + \beta^2}, \\ a_0 = 2R^2\beta\sqrt{\alpha + \beta^2} - 2R^2(\alpha + \beta^2), a_2 = 2R^2\beta\sqrt{\alpha + \beta^2} - 2R^2(\alpha + \beta^2)$$

Case2:

$$\mu_1 = \pm 1, \mu_2 = -1, a_1 = b_1 = b_2 = B_1 = 0, A_0 = -\lambda, A_1 = -2R\sqrt{\alpha + \beta^2}, \\ a_0 = 2R^2\beta\sqrt{\alpha + \beta^2} + 2R^2(\alpha + \beta^2), a_2 = -2R^2\beta\sqrt{\alpha + \beta^2} - 2R^2(\alpha + \beta^2)$$

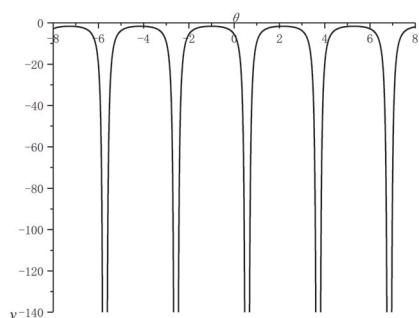
Case3:

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, a_1 = b_1 = 0, A_0 = -\lambda, A_1 = -R\sqrt{\alpha + \beta^2}, \\ a_0 = R^2\beta\sqrt{\alpha + \beta^2} + R^2\beta^2 - \alpha R^2, a_2 = R^2\beta\sqrt{\alpha + \beta^2} - R^2\beta^2 - \alpha R^2, b_2 = a_2, B_1 = A_1$$

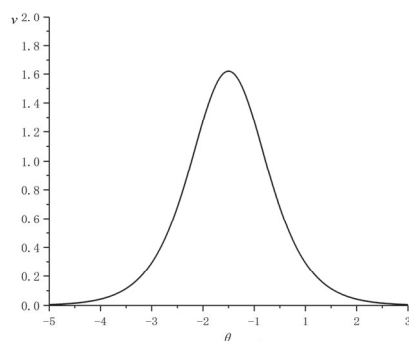
Case4:

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, a_1 = b_1 = A_1 = 0, A_0 = -\lambda, a_0 = -5\alpha\mu_2 R^2 - 5\beta^2\mu_2 R^2 + \mu_1 B^2, \\ a_2 = -\frac{1}{2}\mu_1\mu_2 B_1^2, b_2 = -\beta\mu_2 R B_1$$

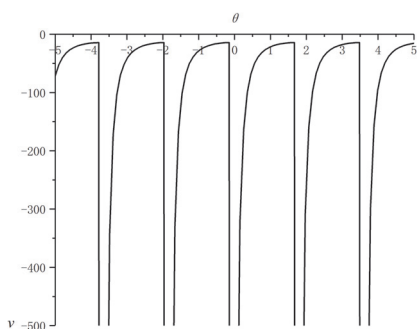
画出 4 种解的 θ 关于 v 的图像, 可知第一个解和第四个解的图形形状为同一类, 分别对应图 1(1)和图 1(4), 第二个解对应图 1(2), 第三个解对应图 1(3)。对得到的波解图像进行观察, 可以看出第二类波解为孤立波解, 其余三类解为周期性解, 波解的形状有所不同。由上述分析可知, 应用此种求解 WBK 方程的新方法可以求得一系列的新解, 由此可以将此方法拓展到其它非线性水波方程的求解上。同时, 32 个具体解析解的求出可以为多种浅水波的数值模拟提供参考。



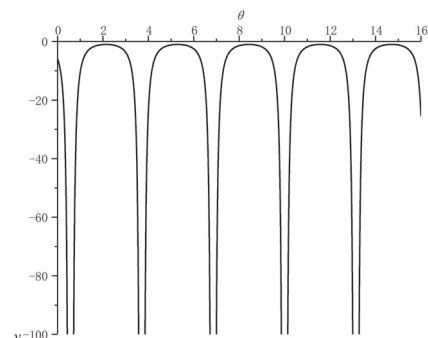
(1)



(2)



(3)



(4)

图1 4组解的 v - θ 变化

3 结论与应用

我们以一个新的形式和方法——改进的黎卡提转换法，构造了 Whitham-Broer-Kaup (WBK) 方程的新解。4 种类型的行波解都求得了具体的解析解，并画出了对应的图像，其中包括孤立波解和周期波解。这些新的解和图形有助于进一步了解非线性波在水中的传播。

海洋工程领域中，海洋平台的水中结构受线性水波和非线性水波共同影响，当海洋工程结构具有较大尺寸时，非线性水波如浅水波等对其波浪载荷影响较大^[16]。海啸是自然界中最令人恐惧的水波，可能是地震，火山活动或山体滑坡产生的。海啸的预测和研究在国际上受到高度重视。海啸的波长范围从数百千米到 1000 千米不等，而在宽阔海域中其

波高不到 2 m。它们可以被归类为浅水波的一种。应用本文中的方法对精确解的研究可为海啸数值模拟提供相应的理论指导,其求解具有重大意义。同时,将文中此种新方法扩展到其他非线性偏微分方程,也可以被用来说明和解释物理学中的许多问题,例如热流现象,等离子体物理学,光纤,流体力学,生物学,化学运动学,电,量子力学等^[17]。因此,改进的黎卡提转换法在描述工程和应用科学领域的非线性问题的特征方面起着至关重要的作用。

参考文献

1. Ping Z. New exact solutions to breaking soliton equations and Whitham-Broer-Kaup equations[J]. Applied Mathematics & Computation, 2010, 217(4): 1688-1696.
2. 田立新, 许刚, 刘曾荣. Camassa-Holm 方程凹凸尖峰及光滑孤立子解[J]. 应用数学和力学, 2002(05): 60-69.
3. 朱铭旋. 浅水波方程的一些研究[D]. 杭州: 浙江师范大学, 2012.
4. Yan Wang, Yu Feng Zhang, Zhen Jiang Liu, and Muhammad Iqbal. A fractional whitham-broer-kaup equation and its possible application to tsunami prevention. Thermal Science, 2017,21: 79-79.
5. 余丽琴, 田立新. Degasperis-Procesi 方程的孤立尖波解[J]. 数学的实践与认识, 2006(03): 263-268.
6. 周毓麟, 郭柏灵. 高阶广义 Korteweg-de Vries 型方程组的周期边界问题与初值问题[J]. 数学学报, 1984(02): 12-34.
7. B.A. Kupershmidt, Mathematics of dispersive water waves, Commun. Math. Phys. 99 (1) (1985): 51-73.
8. M.J. Ablowitz, Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scatting, Cambridge University Press, New York, 1991.
9. S. Murata, Nonclassical symmetry and Riemann invariants, Int. J. Non-Linear Mech. 41 (2006): 242-246.
10. D. J. Kaup, A Higher-Order Water-Wave Equation and the Method for Solving It, Prog. Theor. Phys. 54 (1975): 396-408.
11. Zhenya Y , Hongqing Z . On a new algorithm of constructing solitary wave solutions for systems of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(4): 383-388.
12. GUO Lihong, ZHOU Ran, Jilin University. Travelling Wave Solutions of a Class of Space-Time Fractional Whitham-Broer-Kaup Equations[J]. journal of jilin university, 2017.
13. Xie F , Yan Z , Zhang H . Explicit and exact traveling wave solutions of Whitham-Broer-Kaup shallow water equations[J]. Physics Letters A, 2001, 285(1-2): 76-80.
14. S. Murata, Nonclassical symmetry and Riemann invariants, Int. J. Non-Linear Mech. 41 (2006): 242-246 .
15. Yan Z , Zhang H . New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for Whitham-Broer-Kaup equation in shallow water[J]. Physics Letters A, 2001, 285(5-6): 355-362.

16. 黄华, 张经汉. 大尺度海工圆柱的非线性波浪载荷[J]. 热带海洋, 1999, 018(004): 24-31.
17. M. Arshad, A.R. Seadawy, Dianchen Lu, Jun Wang. Travelling wave solutions of Drinfel'd-Sokolov-Wilson, Whitham-Broer-Kaup and (2+1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmit equations and their applications[J]. Chinese Journal of Physics, 2017, 55(3): 780-797.

Some new solutions of the Whitham-Broer-Kaup equation

WANG Ya-ji, XU Hang, WU Han-jie, GUO Wei-hao, SHEN Yu-xiu

- (1. State Key Lab of Ocean Engineering, School of Naval Architecture, Ocean&Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200240. Email: hangxu@sjtu.edu.cn;
2. Shanghai Min Hang High School, Shanghai, 200240)

Abstract: This paper analyzes and solves the Whitham-Broer-Kaup (WBK) equation of the shallow-water wave model. Based on the Riccati equation, a new transformation method is applied to obtain multiple new solutions to the WBK equation. It is expected that these solutions will enhance our understanding of such shallow water waves and deepen our understanding of nonlinear water waves. At the same time, it provides corresponding theoretical guidance for the study of wave loads in ocean engineering and the numerical simulation of tsunami wave propagation in complex sea conditions. At the same time, this method can be extended to other non-linear equations, and it is of great significance to the research in various engineering and applied science fields.

Key words: WBK equation; Riccati equation; nonlinear water wave; tsunami wave

基于重正化群方法的涡黏性模型改进

刘正锋, 张隆辉

(中国船舶科学研究中心 水动力学重点实验室, 江苏 无锡 214082)

摘要: 涡黏性模型目前仍然是湍流数值模拟的主流模型, 并且在工程实际中得到了广泛的应用。本文基于重正化群(RNG)方法湍动能耗散率 $\bar{\epsilon}$ 进行了分析, 推导了湍动能耗散率 $\bar{\epsilon}$ 的非线性表达形式; 结合 Reynolds 应力和湍动能 K 的数学模型, 通过联立求解对涡黏性模型进行了改进, 得到了一个新的非线性 Reynolds 应力模型, 并且从理论上计算了模型中的各项系数。结果表明, 改进后的新模型从形式上丰富了涡黏性的内涵, 涵盖了流场曲率的影响, 可以更贴切地反映湍流流动的非线性特征本质, 并且避免了传统涡黏性模型中的一些不自洽的地方。

关键词: 湍流模型; 雷诺应力; 涡黏性; 重正化群

1 引言

过去几十年里, 湍流数值模拟取得了长足的发展和进步, 尤其是对基于 Navier-Stokes 方程框架下的雷诺平均湍流模型(RANS), 人们做了大量的研究与总结工作。早在 19 世纪, Boussinesq 就提出以简单的涡黏性模型来模拟雷诺应力, 首先引入了涡黏性的概念。涡黏性模型中需要求解涡黏性, 人们又相继提出了零方程, 一方程以及二方程 $K-\bar{\epsilon}$ 模型即标准 $K-\bar{\epsilon}$ 模型。随着模式理论的研究发展, 涡黏性模型的计算精度有着明显的改进, 但是涡黏性模型本身存在着一些明显的缺陷^[1-3]。另外, 湍流模型系数通常借助于湍流试验结果进行标定, 这也是湍流模式理论的致命伤。因此, 从理论上建立和完善封闭湍流模型吸引了广大湍流研究者的兴趣。

由于高雷诺数湍流中高波数小涡处于统计定常和统计平衡状态, 尤其对于惯性子区内的流动, 能谱函数是普适的, 不存在特征尺度, 与临界现象相似, 因此, 成功处理临界现象的重正化群方法被用来分析湍流。Forster, Nelson 和 Stephen (FNS) 最早利用重正化群方法研究湍流^[4]。Yakhot-Orszag(YO)在 FNS 的研究基础上, 较为系统地利用重正化群方法分析湍流, 对湍流理论中的一些参数进行了计算, 得到了一系列鼓舞人心的结果, 并且在很多复杂流场的计算中取得了成功^[5-7]。更重要的是, 湍流 RNG 模型中的所有湍流常数都是通过理论推导直接获得, 不需要借助于模型试验或简单湍流的数值模拟结果进行标定, 因此利用重正化群方法去建立和完善湍流模型吸引了很多研究人员的兴趣^[8-10]。

本文利用重正化群方法对湍动能耗散率 $\bar{\epsilon}$ 进行分析, 结合 Reynolds 应力和湍动能 K 的数学模型, 对涡黏性模型进行改进研究。

2 湍动能耗散率模型推导

湍流重正化群理论认为, 惯性子区内不可压缩湍流脉动速度 $\mathbf{u}$ 可以用 Gauss 随机力 $\mathbf{f}$ 作用下的 Navier-Stokes 方程予以描述:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu_0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_k \partial x_k} + f_\alpha \quad (1)$$

脉动速度 u_α 在 Fourier 变换下的动力学方程为:

$$u_\alpha(\hat{k}) = G_0(\hat{k}) f_\alpha(\hat{k}) + \frac{\lambda_0}{2i} G_0(\hat{k}) P_{\alpha mn}(\mathbf{k}) \int_{\Lambda_f < q, |\mathbf{k}-\mathbf{q}| < \Lambda_0} u_m(\hat{k}-\hat{q}) u_n(\hat{q}) d\hat{q} / (2\pi)^{d+1} \quad (2)$$

其中, $G_0(\hat{k}) = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1}$; $\hat{k} = (\mathbf{k}, \omega)$; $P_{\alpha mn}(\mathbf{k}) = k_m P_{\alpha n}(\mathbf{k}) + k_n P_{\alpha m}(\mathbf{k})$; $P_{\alpha m}(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha m} - k_\alpha k_m / k^2$; λ_0 为重正化微扰展开的耦合参数。Gauss 型随机力 $\mathbf{f}$ 满足两点作用关联 (two-point correlation):

$$\langle f_\alpha(\hat{k}) f_\beta(\hat{k}') \rangle = 2D_0 (2\pi)^{d+1} P_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) k^{-y} \delta(\hat{k} + \hat{k}'), \Lambda_f < k < \Lambda_0; \quad (3)$$

其中 D_0 为常数。为了满足惯性子区域内的 Kolmogorov 的 -5/3 律, 湍流重正化群理论中取 $y = d = 3$ 。

湍流重正化群理论的具体做法是: 首先将脉动速度 $\mathbf{u}(\hat{k})$ 分成低波数 $\mathbf{u}^<(k \in (0, \Lambda_0 - \Delta\Lambda))$ 和高波数 $\mathbf{u}^>(k \in (\Lambda_0 - \Delta\Lambda, \Lambda_0))$ 两部分, 对高波数分量部分利用参数 λ_0 作微扰展开, 并利用随机力关联方程式 (3) 对高波数分量进行平均, 求得重正化群涡黏性。可以说, 重正化群涡黏性是湍流重正化群湍流理论的基础。

湍动能耗散率 $\bar{\varepsilon}$ 的 Fourier 变换形式为:

$$\bar{\varepsilon} = \nu_0 \left\langle \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} \right\rangle = -\nu_0 \int p_k q_k \langle u_\alpha(\hat{p}) u_\alpha(\hat{q}) \rangle e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}} d\hat{p} d\hat{q} / (2\pi)^{2d+2} \quad (4)$$

将脉动速度分成高波数 $\mathbf{u}^>$ 和低波数 $\mathbf{u}^<$ 两部分, 可以得到:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^< + \bar{\varepsilon}^>$$

其中高波数分量部分

$$\bar{\varepsilon}^> = -\nu_0 \int p_k q_k \langle 2u_\alpha^<(\hat{p}) u_\alpha^>(\hat{q}) + u_\alpha^>(\hat{p}) u_\alpha^>(\hat{q}) \rangle e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}} d\hat{p} d\hat{q} / (2\pi)^{2d+2} \quad (5)$$

以参数 λ_0 作微扰展开到 λ_0 的二阶展开项, $\bar{\varepsilon}^> = (\bar{\varepsilon}^>)^0 + \lambda_0 (\bar{\varepsilon}^>)^1 + \lambda_0^2 (\bar{\varepsilon}^>)^2$, 其中

$$(\bar{\varepsilon}^>)^0 = -\int \nu_0 p_k q_k G(\hat{p}) G(\hat{q}) \langle f_\alpha^>(\hat{p}) f_\alpha^>(\hat{q}) \rangle e^{i(\hat{p}+\hat{q})\hat{x}} d\hat{p} d\hat{q} / (2\pi)^{2d+2}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\varepsilon}^1)^> &= 2i \int v_0 p_k q_k G(\hat{p}) G(\hat{q}) P_{\alpha mn}(\mathbf{q}) G(\hat{q} - \hat{Q}) < f_\alpha^>(\hat{p}) f_m^>(\hat{q} - \hat{Q}) > u_n^<(\hat{Q}) e^{i(\hat{p} + \hat{q})\hat{x}} d\hat{p} d\hat{q} d\hat{Q} / (2\pi)^{3d+3} \\
(\bar{\varepsilon}^2)^> &= \int v_0 p_k q_k [G(\hat{p}) P_{\alpha mn}(\mathbf{p}) G(\hat{p} - \hat{Q}) G(\hat{q}) P_{\alpha rs}(\mathbf{q}) G(\hat{q} - \hat{T}) < f_m^>(\hat{p} - \hat{Q}) f_r^>(\hat{q} - \hat{T}) > \\
&\quad + G(\hat{p}) G(\hat{p} - \hat{Q}) G(\hat{p} - \hat{Q} - \hat{T}) G(\hat{q}) P_{\alpha mn}(\mathbf{p}) P_{mrs}(\mathbf{p} - \mathbf{Q}) < f_r^>(\hat{p} - \hat{Q} - \hat{T}) f_\alpha^>(\hat{q}) > \\
&\quad + G(\hat{p}) G(\hat{q}) G(\hat{q} - \hat{Q}) G(\hat{q} - \hat{Q} - \hat{T}) P_{\alpha mn}(\mathbf{q}) P_{mrs}(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) < f_r^>(\hat{q} - \hat{Q} - \hat{T}) f_\alpha^>(\hat{p}) >] \\
&\quad \cdot u_n^<(\hat{Q}) u_s^<(\hat{T}) e^{i(\hat{p} + \hat{q})\hat{x}} d\hat{p} d\hat{q} d\hat{Q} d\hat{T} / (2\pi)^{4d+4}
\end{aligned}$$

利用随机力两点关联方程(3)，逐次消除 $[\Lambda_f, \Lambda_0]$ 内高波数分量建立各阶模型。对于 $(\bar{\varepsilon}^0)^>$ ，在 $[\Lambda_0 - d\Lambda, \Lambda_0]$ 区间内高波数随机力求平均可得：

$$\Delta \bar{\varepsilon}^0 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\Lambda_0} \right)^{4/3} \frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} (\Lambda_0^{4/3} - (\Lambda_0 - d\Lambda)^{4/3}) \quad (6)$$

根据方程(8)，可建立微分循环关系：

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^0}{d\Lambda} = \left(\frac{1}{\Lambda_0} \right)^{4/3} \frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} \Lambda^{1/3} \quad (7)$$

由于 $\Lambda_0 \gg \Lambda_f$ ，逐次对 (Λ_f, Λ_0) 的高波数随机力进行平均可得：

$$\bar{\varepsilon}^0 = \frac{3}{4} \frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} \quad (8)$$

对于一次项 $\bar{\varepsilon}^{1>}$ 的计算，保留至小波数 $(\hat{Q})$ 的一次项，可得

$$\bar{\varepsilon}^{1>} = \int_{\Lambda-d\Lambda}^{\Lambda} f(q) dq \delta_{ij} \nabla_i u_j^< \quad (9)$$

利用连续性方程 $\nabla_i U_i = 0$ ，即可得

$$\bar{\varepsilon}^{1>} = 0 \quad (10)$$

对于二次项 $\bar{\varepsilon}^{2>}$ ，将其分为两部分：

$$\begin{aligned}
(\bar{\varepsilon}^2_a)^> &= \int v_0 p_k q_k G(\hat{p}) P_{\alpha mn}(\mathbf{p}) G(\hat{p} - \hat{Q}) G(\hat{q}) P_{\alpha rs}(\mathbf{q}) G(\hat{q} - \hat{T}) \\
&\quad < f_m^>(\hat{p} - \hat{Q}) f_r^>(\hat{q} - \hat{T}) > u_n^<(\hat{Q}) u_s^<(\hat{T}) e^{i(\hat{p} + \hat{q})\hat{x}} d\hat{p} d\hat{q} d\hat{Q} d\hat{T} / (2\pi)^{4d+4}
\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\varepsilon}^2_b)^> &= 2 \int v_0 p_k q_k G(\hat{p}) G(\hat{p} - \hat{Q}) G(\hat{p} - \hat{Q} - \hat{T}) G(\hat{q}) P_{\alpha mn}(\mathbf{p}) P_{mrs}(\mathbf{p} - \mathbf{Q}) \\
&\quad < f_r^>(\hat{p} - \hat{Q} - \hat{T}) f_\alpha^>(\hat{q}) > u_n^<(\hat{Q}) u_s^<(\hat{T}) e^{i(\hat{p} + \hat{q})\hat{x}} d\hat{p} d\hat{q} d\hat{Q} d\hat{T} / (2\pi)^{4d+4}
\end{aligned} \quad (12)$$

利用随机力作用关联方程(3)，可得：

$$\begin{aligned}
(\bar{\varepsilon}^2_a)^> &= 2D_0 \int v_0 (-q + Q)_k (q + T)_k G(-\hat{q} + \hat{Q}) G(-\hat{q}) G(\hat{q} + \hat{T}) G(\hat{q}) \\
&\quad P_{\alpha rs}(\mathbf{q} + \mathbf{T}) P_{\alpha mn}(-\mathbf{q} + \mathbf{Q}) P_{mr}(\mathbf{q}) q^{-y} u_n^<(\hat{Q}) u_s^<(\hat{T}) e^{i(\hat{Q} + \hat{T})\hat{x}} d\hat{q} d\hat{Q} d\hat{T} / (2\pi)^{3d+3}
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\varepsilon}^2_b)^> &= 4D_0 \int v_0 (-q + Q + T)_k q_k G(-\hat{q} + \hat{Q} + \hat{T}) G(-\hat{q} + \hat{T}) G(-\hat{q}) G(\hat{q}) \\
&\quad P_{\alpha mn}(-\mathbf{q} + \mathbf{Q} + \mathbf{T}) P_{mrs}(-\mathbf{q} + \mathbf{T}) P_{ar}(\mathbf{q}) q^{-y} u_n^<(\hat{Q}) u_s^<(\hat{T}) e^{i(\hat{Q} + \hat{T})\hat{x}} d\hat{q} d\hat{Q} d\hat{T} / (2\pi)^{3d+3}
\end{aligned} \quad (14)$$

对式中的高频部分 ω_q 进行积分, 令 $\omega_r \rightarrow 0, \omega_q \rightarrow 0$, 并对小波数量 Q, T 进行展开, 保留至二阶小量 $O(QQ, QT, TT)$ 项, 利用如下关系:

$$\begin{aligned} \int_{Q, T} T_m T_r u_n^<(\hat{Q}) u_s^<(\hat{T}) e^{i(\hat{Q}+\hat{T})\hat{x}} d\hat{Q} d\hat{T} / (2\pi)^{2d+2} &= -u_n^<(\partial^2 u_s^< / \partial x_m \partial x_r) \\ \int_{Q, T} Q_m T_r u_n^<(\hat{Q}) u_s^<(\hat{T}) e^{i(\hat{Q}+\hat{T})\hat{x}} d\hat{Q} d\hat{T} / (2\pi)^{2d+2} &= -(\partial u_n^< / \partial x_m)(\partial u_s^< / \partial x_r) \end{aligned} \quad (15)$$

逐次消除 (Λ_f, Λ_0) 的高波数, 可以得到:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{20} \frac{D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu^2(\Lambda_f) \Lambda_f^4} \left(\frac{\partial u_n^<}{\partial x_m} \frac{\partial u_n^<}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^<}{\partial x_m} \frac{\partial u_m^<}{\partial x_n} \right) \quad (16)$$

因此, 湍动能耗散率的二阶代数模型为:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{4} \frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} + \frac{3}{40} \frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu^2(\Lambda_f) \Lambda_f^4} \left(\frac{\partial u_n^<}{\partial x_m} \frac{\partial u_n^<}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^<}{\partial x_m} \frac{\partial u_m^<}{\partial x_n} \right) \quad (17)$$

湍流重正化群理论认为波数小于 Λ_f 的大尺度速度可以看成平均速度:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_f} \mathbf{u}^< = \mathbf{U} \quad (18)$$

故湍动能耗散率方程最终可以表示为:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{4} \frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} + \frac{3}{40} \frac{2D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu^2(\Lambda_f) \Lambda_f^4} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_m} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} + \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \right) \quad (19)$$

3 Reynolds 应力模型改进

要将湍动能耗散率方程与常用涡黏性模型联系起来, 首先给出 Reynolds 应力以及湍动能的表达形式。利用湍流重正化群理论推导的 Reynolds 应力非线性涡黏性模型为^[9]:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= -\frac{D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu(\Lambda_f) \Lambda_f^2} \delta_{\alpha\beta} + \frac{3}{20} \frac{D_0}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu^2(\Lambda_f) \Lambda_f^4} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{1}{840} \frac{D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{\Lambda_f^{-6}}{\nu^3(\Lambda_f)} \{ 48 \left[\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\beta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_m} \right) \delta_{\alpha\beta} \right] + 56 U_\mu \left(\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\mu} + \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} \right) \} \end{aligned} \quad (20)$$

由 $\langle u_\alpha u_\alpha \rangle = 2K$, 可以得到:

$$K = \frac{3}{2} \frac{D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu(\Lambda_f) \Lambda_f^2} + \frac{1}{10} \frac{D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{\Lambda_f^{-6}}{\nu^3(\Lambda_f)} \left(\frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial U_\mu}{\partial x_m} \right) \quad (21)$$

联立方程(19)与方程(21), 令 $\frac{1}{\nu(\Lambda_f) \Lambda_f^2} = f \frac{K}{\varepsilon}$, 可以得到如下关于 f 的一元三次方程:

$$\frac{1}{10}\eta^2 x^3 - \frac{3}{20}\eta^2 x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = 0 \quad (22)$$

方程(22)存在一个实根和两个共轭复根, 实根表达式如下:

$$x = [\frac{3}{20}\eta^2 - (\sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2})]/(\frac{3}{10}\eta^2) \quad (23)$$

其中, $\eta = \sqrt{S_{mm}^2} \frac{K}{\varepsilon}$, $S_{mn}^2 = S_{mk}S_{kn}$, $S_{mn} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m})$, $Y_1 = -\frac{3}{20}A\eta^2 + 3\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{20}\eta^2$,

$$Y_2 = -\frac{3A}{20}\eta^2 + 3\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{20}\eta^2, \quad A = \frac{9}{400}\eta^4 - \frac{9}{40}\eta^2, \quad B = \frac{45}{80}\eta^2, \quad C = \frac{9}{16} - \frac{27}{80}\eta^2.$$

因此, 改进后涡黏性的表达形式:

$$\nu_T = \frac{x^2}{10 + 2\eta^2 x^2} \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (24)$$

同时, 可得 Reynolds 应力模型的非线性形式为:

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta} + 2\nu_T S_{\alpha\beta} - \frac{K^3}{\varepsilon} [C_1(S_{\alpha\mu}S_{\mu\beta} - \frac{1}{3}S_{m\mu}S_{\mu m}\delta_{\alpha\beta}) + C_2(U_\mu \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu})] \quad (25)$$

各湍流参数的理论计算值为: $C_1 = \frac{0.76x^3}{5 + \eta^2 x^2}$, $C_2 = \frac{0.447x^3}{5 + \eta^2 x^2}$ 。

对于弱剪切湍流, $|\nabla U|$ 较小时, 忽略方程(25)中的二次项, 可以得到:

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}K\delta_{\alpha\beta} + 2\nu_T S_{\alpha\beta}; \quad \nu_T = 0.1K^2/\varepsilon \quad (26)$$

与常用的线性涡黏性模型一致, 且系数也相近。

另外, 线性涡黏性模型有时会导致湍动能的分量为负, 这主要是由于速度梯度较大时会导致:

$$\overline{u^2} = \frac{2}{3}K - 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x} < 0 \quad (27)$$

而对于非线性模型, 忽略二阶导数项,

$$\langle u^2 \rangle = \frac{D_0 S_d}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu \Lambda_f^2} (1 - 0.3 \frac{1}{\nu \Lambda_f^2} \frac{\partial U}{\partial x} + 0.285 \frac{1}{\nu^2 \Lambda_f^4} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x}) \quad (28)$$

方程(28)恒大于 0, 保证了湍动能分量始终为正, 满足“可实现性”原理。

对比于传统涡黏性模型, 传统模型中涡黏系数为常数, 而改进后的新模型中, 涡黏性系数中含有平均应变相互作用项, 从形式上涵盖了速度梯度对湍流黏性的影响, 且非线性项中还包含了 Reynolds 应力的松弛项, 并严格满足 Speziale 提出的一致性条件^[11], 可以预期新模型能在一定程度上反映流线的曲率对湍流结构的影响, 也使得该模型的适用性更为广泛。

4 结论

从理论上去建立湍流模型将更能促进湍流模式理论的不断发展和人们对湍流现象的认识和了解。本文通过利用重正化群方法对湍动能耗散率方程进行推导,对雷诺应力涡黏性模型进行了改进,并给出了改进后的涡黏性系数表达形式。改进后的新模型,从形式上避免了传统涡黏性模型中的一些不足,同时丰富了涡黏性的内涵,更能贴切地反映湍流的流动机理。需要指出的是,在以后的工作中还需开展数值模拟工作对改进后的新模型来进行验证和完善。

参考文献

1. 符松. 湍流模式——研究现状与发展模式[J]. 应用基础与工程科学学报, 1994, 2(1): 1-15.
2. 符松. 非线性湍流模式研究及进展[J]. 力学进展, 1995, 25(3): 318-328.
3. Speziale C G. Analytical Methods for the Development of Reynolds-Stress Closures in Turbulence [J]. Annu. Rev. Fluid Mech, 1991, 23: 107-157.
4. Forster D, Nelson D R, Stephen M J. Long-Time Tails and the Large-Eddy Behavior of a Randomly Stirred Fluid[J]. Phys Rev Lett., 1976, 36: 867 – 870.
5. Yakhot V, Orszag S A. Renormalization Group analysis of turbulence: I Basic Theory [J]. J Sci Comput, 1986, 1: 3-51.
6. Yakhot V, Orszag S A. Renormalization-Group analysis of turbulence [J]. Phys Rev Lett, 1986, 57: 1722-1724.
7. Yakhot V, Orszag S A, et al. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique [J]. Phys Fluids A, 1992, 4: 1510-1520.
8. Rubinstein R, Barton J M. Renormalization group analysis of Reynolds stress transport equation [J]. Phys Fluids A, 1992, 4: 1759-1766.
9. 刘正锋. 利用重正化群方法推导剪切湍流模型[D]. 中国科学技术大学博士毕业论文. 2008.
10. Wang X H, Liu Z F, et al. Derivation of a second-order model for Reynolds stress using renormalization group analysis and the two-scale expansion technique [J]. Acta Mech Sin. 2011, 27(5):649–659.
11. Speziale C G. A consistency condition for nonlinear algebraic Reynolds stress models in turbulence [J]. Int. J. Non-linear Mechanics, 1998, 33: 579-584.

Modification of eddy viscosity model based on renormalization group method

LIU Zheng-Feng, ZHANG Long-hui

(National Key Laboratory of Science and Technology on Hydrodynamics, China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China)

Abstract: At present, eddy viscosity model is still the mainstream model in turbulence numerical simulation, and has been widely applied in practical engineering. The main objective of this paper is to improve the eddy viscosity model based on renormalization group method. Firstly, the turbulence dissipation rate $\bar{\varepsilon}$ is analyzed, and its nonlinear model is derived. Then, combined with the theoretical models of Reynolds stress and turbulent kinetic energy K , the eddy viscosity is modified, and a new nonlinear model is obtained simultaneously. And the coefficients in the new model are calculated theoretically. The results show that the new model contains the influence of the curvature of turbulent flow, which enriches new eddy viscosity contents, and can reflect the nonlinear nature of turbulent flow better.

Key words: turbulence model; Reynolds stress; eddy viscosity; renormalization group(RNG).

A study of the Acoustic-wave effects inside a single oscillating bubble

YU Yi-quan, ZONG Zhi

(School of Naval Architecture, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, Email:
yuyiquan@mail.dlut.edu.cn)

Abstract: A model for the compressible gas in a single oscillating bubble is developed. The model describes the non-uniform distribution of internal gas. The density and pressure of the gas are described by the Euler equations. By using the method of perturbation, proximate analytical solutions of the density and pressure in the gas sphere is obtained. It's proved that there are standing waves in the bubble. For a violently oscillating bubble, the density and pressure of the gas follow a quadratic distribution. For a softly oscillating bubble, the zero order of the solution follows a uniform distribution. But the first order of the solution permits the existence of standing waves in the gas sphere. A pulsating pressure would present in the liquid when the bubble oscillates. According to our physical model, standing waves in the gas sphere would cause local pressure peaks superimposed on the pulsating pressure. Such local peaks are found in a centrifuge underwater explosion experiment^[1]. In order to validate our physical model, experimental parameters are substituted into the physical model. And theoretical pressure peaks agree with experimental pressure peaks. The frequency and amplitude of local pressure peaks determine whether it is observable or not. And the influential factors of the frequency and amplitude are discussed.

Key words: internal gas of a bubble, acoustic-wave effects, the method of perturbation, proximate analytical solutions

1 Introduction

It has long been known that, when a liquid ruptured by a decrease in local pressure, bubbles may form and undergo radial oscillations. Since the groundbreaking works of Rayleigh^[2], the gas inside the bubble has captivated scientist's attention. Macedo et al^[3] studied the inner gas of the bubble with small amplitude oscillations in a steady sound field. Analytical solutions for the distribution of the gas are obtained by assuming that the time dependence of the various

quantities is the same as the sound field. Their work reveals the wave effects in such bubbles. Kim et al^[4], Lin et al^[5], and Geer et al^[6] studied the inner gas of a single oscillating bubble and obtained analytical solutions for the density and pressure distributions of the gas. Their models illustrate the nonuniformity of the gas but failed to describe the acoustic-wave effects of the gas. However, wave effects are observed in a numerical study on the underwater explosion bubble^[7]. Acoustic-wave effects are also observed in underwater explosion experiments^[1]. The present work provides an analytical method to describe such acoustic-wave effects.

In this study, analytical solutions for the density and pressure inside an oscillating gas bubble is obtained by solving the Euler equations. The results show that there're standing waves inside the bubble when the bubble oscillates softly. The acoustic-wave effects in our physical model is examined by comparing theoretical results and experimental data. Finally, we discuss some influence factors for the wave effects to appear.

2 The governing equations of the liquid

We consider a single spherical gas bubble oscillating without any driven forces in the liquid. A schematic overview of the bubble model is provided in Figure 1. The inside of the bubble surface is denoted by surface B , and the outside is surface L ; D denotes an arbitrary point in the liquid near the bubble. The gas pressure at surface B and surface L are p_{BR} and p_{LR} respectively. We suppose that the propagation of the liquid pressure is irrelevant to the polar angle and the azimuth angle from O . The liquid pressure at point D is $p_D(d, t)$.

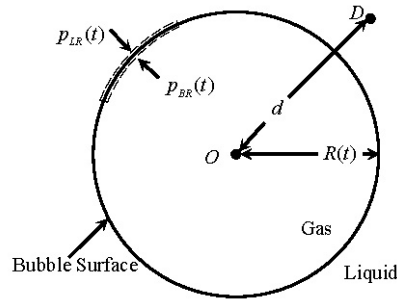


Figure 1A brief sketch of a single oscillating bubble.

Some assumptions of our work are listed as: (a) the gas in the bubble is the compressible and inviscid ideal gas; (b) the liquid adjacent to the bubble is the ideal liquid; (c) the gas undergoes a polytropic process; (d) the surface tension and the mass transport on the bubble surface are negligible; and (e) the bubble maintains a spherical shape and the gas moves radially.

The continuity equation of the liquid around the bubble gives

$$\varphi = \frac{F(t)}{d^2} = \frac{\dot{R}R^2}{d^2}, \quad \Phi = -\frac{\dot{R}R^2}{d} \quad (1)$$

in which, t is time, $R=R(t)$ is the bubble radius, the overdot denotes d/dt , $F(t)=\dot{R}R^2$, $\varphi(d,t)$ and $\Phi(d,t)$ are the velocity and the velocity potential at D . The momentum equation of the liquid is

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial P^*}{\partial d} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial d} \quad (2)$$

Here P^* is the liquid pressure, ρ_L is the liquid density. Since the surface tension and the viscosity of the gas are neglected, the boundary condition of the gas is $p_{BR}=p_{LR}$. Then we can obtain the relation between p_{BR} and p_D as

$$p_{BR} = \frac{d}{R} (p_D - p_\infty) - \frac{1}{2} \dot{R}^2 \rho_L \left[1 - \left(\frac{R}{d} \right)^3 \right] + p_\infty \quad (3)$$

in which, p_∞ is the liquid pressure far from the bubble. (3) indicates that the frequency of the liquid pressure doesn't change with d . But the amplitude of the pressure decrease with d . In the present work, the bubble radius is considered as a known function. It can be determined from an experiment or the Rayleigh-Plesset equation (RPE).

3 The governing equations and solutions of the gas

The governing equations of the inner gas are

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5)$$

Here $r \in [0, R]$ is the distance from the center of the bubble, ρ is the density of the gas in the bubble, v is the radial velocity, and p is the gas pressure. The perturbation expansions are constructed as

$$\begin{aligned} v &= v_0(t, r) + \varepsilon v_1(t, r) + \varepsilon^2 v_2(t, r) + \dots \\ \rho &= \rho_0(t, r) + \varepsilon \rho_1(t, r) + \varepsilon^2 \rho_2(t, r) + \dots \\ p &= p_0(t, r) + \varepsilon p_1(t, r) + \varepsilon^2 p_2(t, r) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

in which v_0 , ρ_0 , and p_0 are zero orders, v_1 , ρ_1 , and p_1 are first orders; ε is an arbitrary small quantity to ensure that the first orders are much less than the zero orders. The state equations for the zero orders are

$$p_0 = p_r \left(\frac{\rho_0}{\rho_r} \right)^\kappa, c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} = \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \quad (7)$$

where κ is the polytropic index, p_r and ρ_r are reference values of internal pressure and density. c is the sound speed of the gas.

We introduce (6) into (4) and (5), and keep only terms to the zero order to obtain

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{2\rho_0 v_0}{r} = 0 \quad (8)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p_0}{\partial r} \quad (9)$$

These equations admit nonuniform solutions for zero orders as

$$v_0 = \frac{\dot{R}}{R} r, \rho_0 = mR^{-3} \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{m\ddot{R}}{R^2 p_c} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^{1/(\kappa-1)}, p_0 = p_c \left(1 - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{m\ddot{R}}{R^2 p_c} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (10)$$

Where $p_c(t) = p_0(t, 0) = p_r(mR^{-3}/\rho_r)^\kappa$ is the gas pressure at the center of the bubble, m is a constant determined by the total mass in the bubble. We define a dimensionless variable θ as $\theta(t) = m\ddot{R}/(\kappa R^2 p_c)$. Solutions for the zero orders show the nonuniformity of the gas but failed to describe the wave effects in the gas. Next, we press on and solve for the first orders.

θ measures the intensity of the bubble oscillation. When $\theta \ll 1$, the bubble oscillates softly. And it increases as the bubble oscillates more violent. In the following deductions, we assume that the bubble moves softly enough, so that $\theta \ll 1$. Then ρ_0 and p_0 are simplified into

$$\rho_0(t) = mR^{-3} = \frac{3M}{4\pi} R^{-3}, p_0(t) = p_c(t) = p_r \left(\frac{R_r}{R} \right)^{3\kappa} \quad (11)$$

in which $R_r = (m/\rho_r)^{1/3}$ is a reference radius, M is the total mass in the bubble. To solve the first orders, we begin with substituting (6) into (4) and (5). Then keep all terms with ε , obtaining

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_1)}{\partial r} + \frac{\rho_1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_0)}{\partial r} + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} v_1 = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \rho_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial r} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p_1}{\partial r} \quad (13)$$

In order to simplify it, we adopt new variables δ , x , and τ :

$$x = r/R, \tau = t, \delta = \rho_1/\rho_0, x \in [0, 1]. \quad (14)$$

Here δ is the dependent variable; x and τ are independent variables. It is worth mentioning that x is the co-moving coordinate of space. In the co-moving coordinate, the distances between the center of the bubble and the bubble wall equals to 1. After some derivation, we obtain

$$R^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + 2R_\tau R \frac{\partial \delta}{\partial \tau} - \frac{2c^2}{x} \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

where $R_\tau = dR/d\tau$. This is the governing equation of ρ_1 . We use the separation of variables and suppose δ has the form as $\delta = T(\tau) \cdot X(x)$. $X(x)$ describes the profile of the gas density. $T(\tau)$ describes how the amplitude of the profile varies with time. The solution for $X(x)$ has a form as

$$X = \zeta_x \frac{\sin(kx)}{x}, k \in \mathbb{R} \quad (16)$$

Here, ζ_x is an arbitrary constant. This solution suggests that the inner gas of the bubble distributes sinusoidally.

Let's define variables $z = \pi\tau/2 \cdot \tau_{\max}$, $u(z) = T(z) \cdot R(z)$. The constant $\tau_{\max} = t_{\max}$ is the maximum of τ . Then $u(z)$ is the solution of a Hill equation. Hill equation can be solved analytically. We only give the solution here, More details are shown in Yakubovich et al^[8]. $T(\tau)$ has the form as

$$T(\tau) = \zeta_T \frac{1}{R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i(\beta+2n)\frac{\pi}{2\tau_{\max}}\tau}, (n \in \mathbb{Z}, \beta, b_n \in \mathbb{C}) \quad (17)$$

in which, ζ_T is an arbitrary constant. β and b_n are constants determined by $\{\theta_j\}$. $T(\tau)$ converges when n is large enough. So there's no need to calculate every b_n practically. We calculate b_n by mathematical software. As long as b_n is obtained, δ has the form as

$$\delta(x, \tau) = X(x)T(\tau) = \zeta \frac{1}{R} \frac{\sin(kx)}{x} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i(\beta+2n)\frac{\pi}{2\tau_{\max}}\tau} \quad (18)$$

Here, $\zeta = \zeta_x \cdot \zeta_T$. ρ_1 , and p_1 have the form as

$$\rho_1(r, t) = \rho_0 \delta = \frac{3M\zeta}{4\pi} \frac{\sin(kr/R)}{rR^3} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i(\beta+2n)\frac{\pi}{2\tau_{\max}}t} \quad (19)$$

$$p_1(r, t) = c^2 \rho_1 = \left(\kappa \frac{p_0}{\rho_0} \right) \rho_0 \delta = \kappa p_0 \delta = \kappa p_r R_r^{3\kappa} \zeta \frac{\sin(kr/R)}{rR^{3\kappa}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i(\beta+2n)\frac{\pi}{2\tau_{\max}}t} \quad (20)$$

Here, $\varepsilon_\zeta = \varepsilon \zeta \ll 1$. (19)~(20) are analytical solutions that describe density and pressure inside the bubble provided that $R(t)$ is known. The distribution of the gas indicates that a sinusoidal standing wave could emerge during the oscillation of the bubble. Figure 2 is a sketch of how a standing wave distributes. The amplitude of the longitudinal wave only denotes the relative magnitudes of the standing wave. The standing wave in the bubble is a transverse wave.

The amplitude of the standing wave decreases with the increase of x . k is the wave number of the standing wave in the co-moving coordinate. k keeps a constant in the co-moving coordinate. If k is a small amount, the inner gas has an approximate uniform distribution. As k increases, the wave effect of the gas becomes more obvious. (15) is a second order linear partial differential equation, so the general solution of (15) has the form as

$$\delta = \zeta_1 \delta_1 + \zeta_2 \delta_2 + \cdots \zeta_n \delta_n + \cdots = \zeta_1 X_1 T_1 + \zeta_2 X_2 T_2 + \cdots \zeta_n X_n T_n + \cdots \quad (21)$$

in which, ζ_i are arbitrary numbers determined by the proportion of every standing wave. (21) suggests that there are maybe more than one standing waves in the gas. We denote the wave

numbers of these waves as k_i .

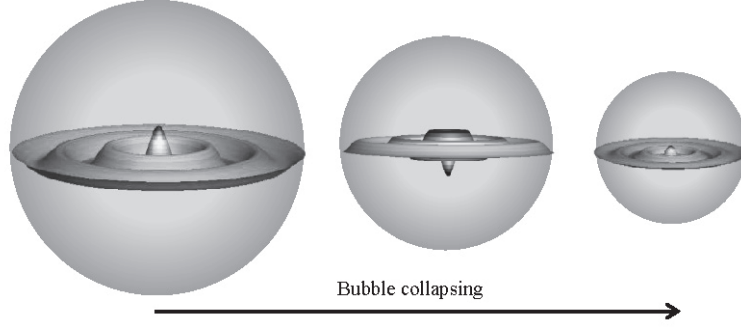


Figure 2A sketch of how standing wave distributes when a bubble is collapsing.

Give all that, k is an essential parameter to our physical model. So, we are going to discuss how to determine it. Considering k is the wave number of the standing wave, the angular frequency of the standing wave ω has an expression as $\omega = ck/R = \omega^* R^{\frac{1-3\kappa}{2}}$, in which $c_0 = \sqrt{4\pi\kappa p_r R_r^{3\kappa}/3M}$ is a constant. $\omega^* = c_0 k$ is an undetermined coefficient. ω is a function of time. As long as k is undetermined, the range of ω is undetermined in theoretical research. However, the range of ω can be obtained in experimental research. And k is determined once the range of ω is obtained.

To obtain the range of ω , we begin with the discussion of p_{BR} . Theoretically, the expression of p_{BR} is

$$p_{BR}(t) = p_0(t) + p_1(r=R, t) = \left(\frac{p_r R_r^{3\kappa}}{R^{3\kappa}} \right) \left(1 + \varepsilon \kappa \zeta \frac{\sin(k)}{R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i(\beta+2n)\frac{\pi}{2\tau_{\max}}t} \right) \quad (22)$$

This suggests that there are sinusoidal pressure pulsations in p_{BR} . Such pulsations cause local pressure peaks. A compare between p_{BR} and $T(\tau)$ shows that the frequency of the local pressure peaks equals to ω . Therefore the range of ω is obtained by a Fourier transform of p_{BR} . For experimental research, p_D is measurable through a pressure sensor in the liquid. And p_{BR} is calculated by (3). Then the range of ω and k are obtained from the Fourier transform of p_{BR} . This method also works when the gas contains several standing waves with different wave numbers. When the gas contains several standing waves, the Fourier transform of p_{BR} also gives the proportion of every standing wave. So ζ_i are also determined.

4 The validation of our physical model

We now briefly introduce equipment, procedures, and results of the underwater explosion (UNDEX). More details are introduced in Hu et al^[1]. The UNDEX is executed in a centrifuge. The model and measuring equipment are all placed in a container placed at one end of the centrifuge. When the centrifuge rotates steadily, a horizontal centrifugal force exerts on the model. The explosive is detonated when the centrifugal force is much greater than the vertical gravity. Researchers neglect the vertical gravity and consider the centrifugal force as a new gravity. The explosion produces an oscillating gas bubble. The bubble radius is captured by a high speed camera. The oscillation of the bubble causes a pulsating pressure in the water. This pressure is recorded by a pressure sensor placed near the bubble. The position of the pressure sensor is simplified as the point D in Figure 1. p_D denotes the pressure of the pressure sensor. 19 tests named from UE-01 to UE-19 are arranged. Figure 3 shows the experimental result of the bubble radius and the pulsating pressure in UE-01 and UE-02 cases.

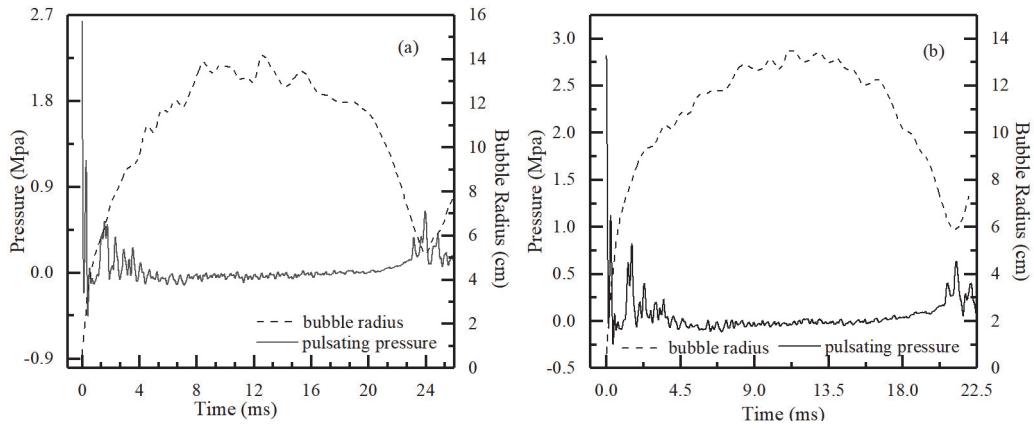


Figure 3 Experimental result of the bubble radius and the pulsating pressure in UE-01 (a) and UE-02 cases (b).

We observe some local pressure peaks during the span that the bubble reaches its minimum volume and rebounds ($[23ms, 25ms]$ in UE-01 and $[20.5ms, 22.5ms]$ in UE-02). These local peaks are shown more obviously in Figure 4. According to our physical model, standing waves in the gas causes p_{BR} to pulsate in the same frequency with the standing wave. When ω is far higher than the frequency of the bubble oscillation, local pressure peaks are superimposed on the pulsating pressure in the liquid. We propose that local peaks in Figure 4 are caused by the standing waves in the gas. Therefore we calculate the theoretical p_D and compare it with the experimental value. According to (3), p_D is calculated as

$$p_D = p_\infty + \frac{R}{d}(p_{BR} - p_\infty) + \frac{1}{2} \frac{R}{d} \dot{R}^2 \rho_L \left[1 - \left(\frac{R}{d} \right)^3 \right] \quad (23)$$

And p_{BR} is calculated as

$$p_{BR} = p(R, t) = p_0(t) \cdot (1 + \varepsilon \zeta_1 \gamma \delta_1(R, t) + \varepsilon \zeta_2 \gamma \delta_2(R, t)) \quad (24)$$

Parameters in these expressions are shown in Table 1. G is the centrifugal acceleration. g is the acceleration of the vertical gravity. γ is the ratio of specific heat of the gas. We assume that the gas of the bubble undergoes an adiabatic process, so $\kappa = \gamma$. A comparison between the theoretical result and the experimental data is shown in Figure 4. It can be seen that frequencies and amplitudes of the theoretical local peaks agree with the experimental local peaks.

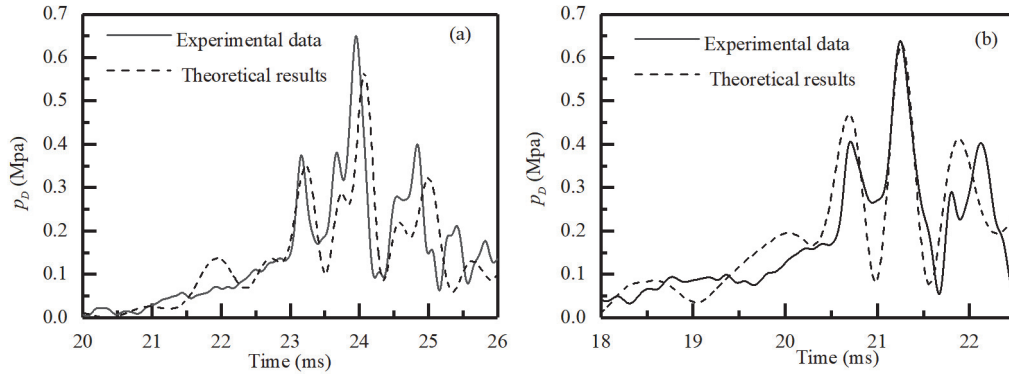


Figure 4A comparison between the theoretical result and the experimental data in (a) UE-01 case and (b) UE-02 case.

Table 1 Some parameters of UE-01 and UE-02 cases.

	G / g	M / kg	γ	ε	k_1	k_2	ζ_1	ζ_2
UE-01	20	1.02	1.25	0.015	0.33	0.6356	1	0.3
UE-02	30	1.021	1.25	0.015	0.376	0.47	-1	0.65

5 Discussion

A model test in a centrifuge can be justified to reproduce the phenomenon with the prototype in the practical geotechnical engineering. Since local pressure peaks appear in Hu et al's centrifuge model test, it should also appear in the prototype. However, such peaks are hardly reported in other experiments. The frequency and amplitude of the peaks determine whether it is observable or not. So in this section, some influential factors of the frequency and amplitude are discussed.

The first influential factor is the centrifuge. If the centrifugal acceleration provided by the centrifuge is ξ times greater than the vertical gravity, then the amplitude of the standing wave in the prototype is ξ times less than the model test. Therefore, local pressure peaks of the gas can hardly impact on the water pressure. So the local peaks are hardly observed in the prototype.

To illustrate the influence of the centrifuge on the standing wave, we compare the centrifuge model test with the prototype correspondingly. Parameters of the prototype are calculated by the parameters of the model test and the scaling law. By using the scaling law in Hu et al's experiment, we substitute the prototype parameters into our physical model. And obtain the relation between the standing wave amplitude in the model test and the amplitude in the prototype as

$$T_p(z) = \frac{1}{\xi} T_m(z), \delta_p(x, z) = \frac{1}{\xi} \delta_m(x, z) \quad (25)$$

Here, the subscript m stands for variables of models, and p stands for those of prototypes. This demonstrates that the amplitude of the standing waves in the prototype is ξ times less than the amplitude in the centrifuge. It explains why local pressure peaks are hardly observed in any prototype under normal gravity.

Table 2 Parameters of a series of underwater explosion experiments.

	EX-01	EX-02	EX-03	EX-04	EX-05	EX-06	EX-07	EX-08
$\lambda(m^2/s^2)$	4	5	6	12	30	120	180	240
G/g	1	1	1	1	1	1	1	1
M/kg	8.16	8.16	8.16	8.16	8.16	8.16	8.16	8.16

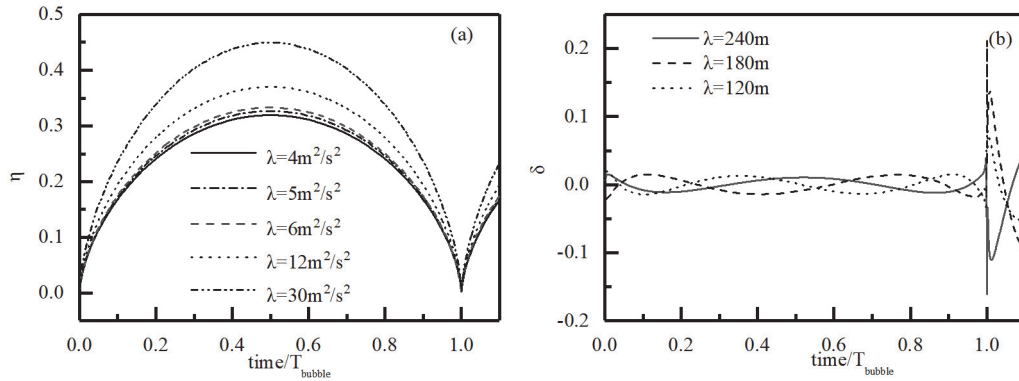


Figure 5(a) A comparison between η in EX-01~05. (b) A comparison between δ in EX-06~08.

Another influential infector is the product of h and G , namely $\lambda=hG$. Remember that h is the depth of the bubble, namely the depth of the explosive h . We propose that local peaks are harder observed as λ increases. To elaborate on this idea, a series of underwater explosion experiments are considered. The parameters of these experiments are shown in Table 2. These experiments are named as EX-01~08. Bubble radius time histories in these experiments are calculated from the RPE equation. And the distribution of the gas is calculated by our physical model. η is determined as the ratio of the period of the local peaks to the period of the bubble oscillation. The peaks are easier to be observed if η is closer to zero. If η is closed to or even

greater than 1, the peaks are not observable. η in EX-01~05 are calculated and shown in Figure 5(a). Parameters in these cases are all the same except for λ . So Figure 5(a) indicates that η increases with λ . Therefore, local pressure peaks are harder observed as λ increases. δ in EX-06~08 are calculated and shown in Figure 5(b). It can be seen that the standing wave amplitude isn't related to λ .

6 Conclusion

The present work considers the inner gas of a single oscillating bubble in the infinite liquid. Based on the Euler equations, we establish a physical model to describe the distribution of the gas. By using the method of perturbation, analytical solutions for the density and pressure of the gas are obtained. The model reveals the acoustic-wave effects of the gas. When the bubble oscillates softly, the first order indicates that there are standing waves in the gas. When the frequency of the standing wave is far higher than the frequency of the bubble oscillation, the standing wave may cause several local pressure peaks at the bubble wall. Such peaks are observed in Hu et al's experiment. To validate our model, we calculate the amplitude and the frequency of these peaks. And theoretical results agree with experimental results. The frequency and amplitude of local pressure peaks determine whether it is observable or not. At last in the present work, we discuss some influential factors of the frequency and amplitude.

Acknowledgements The present work is supported by the National Natural Science Foundation of China (51679037 and 51639003).

References

- 1 Hu J, Chen Z Y, Zhang X D, Wei Y Q, Liang X Q, et al. Underwater explosion in centrifuge part I: Validation and calibration of scaling laws. *J. Science China Technological Sciences*, 2017, 60(11), 1638-1657.
- 2 Rayleigh L. VIII. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *J. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1917, 34(200): 94-98.
- 3 Macedo I C, Yang W J. Acoustically forced oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Japanese Journal of Applied Physics*, 1972, 11(8): 1124.
- 4 Kim K Y, Byun K T, Kwak H Y. Temperature and pressure fields due to collapsing bubble under ultrasound. *J. Chemical Engineering Journal*, 2007, 132(1-3): 125-135.
- 5 Lin H, Storey B D, Szeri A J. Inertially driven inhomogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh-Plesset equation. *J. Journal of Fluid mechanics*, 2002, 452: 145-162.
- 6 Geers T L, Lagumbay R S, Vasilyev O V. Acoustic-wave effects in violent bubble collapse. *J. Journal of Applied Physics*, 2012, 112(5): 054910.
- 7 Wardlaw Jr A B, Mair H U. Spherical solutions of an underwater explosion bubble. *J. Shock and Vibration*, 1998, 5(2): 89-102.
- 8 Yakubovich V A, Starzhinskii V M. *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*. New York, John Wiley, 1975.

剪切稀变流体对绕水翼空化流动特性的影响研究

王璐¹, 王顺¹, 刘平安¹, 郑智颖²

(1. 哈尔滨工程大学 航天与建筑工程学院, 哈尔滨, 150001, Email: wang-lu@hrbeu.edu.cn

2. 哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨, 150001)

摘要: 本研究针对剪切稀变流体对绕 NACA66 水翼空化流动特性的影响进行大涡数值模拟 (WALE 亚格子模型) 研究, 采用广义牛顿流体模型 Cross 黏度方程描述剪切稀变流体的剪切黏度随剪切率增大而减小的剪切稀变特性。研究发现: 剪切稀变流体促进了绕水翼空化的发展; 对于云状空化, 在相同空化数下剪切稀变溶液中空泡脱落的周期比水中的小, 但剪切稀变流体对绕水翼超空化状态影响不大; 剪切稀变流体对水翼升力系数的影响不大, 但明显减小了阻力系数。本研究将为剪切稀变流体控制空化流动的新技术提供依据。

关键词: 剪切稀变流体; 水翼; 云状空化; 减阻

1 引言

在航海方面, 减小船舶航行阻力不仅可以节约其推进所消耗的燃料量, 也可以实现进一步提升航行速度。目前, 在船舶外安装水翼是减小其航行阻力的普遍适用和极为有效的方法。然而, 在水翼上表面极易产生空化现象, 随着空化现象周期性地初生、发展、脱落和溃灭, 其产生的周期性压力波将严重侵蚀水翼表面, 从而破坏机械结构, 并且压力波以及回射流冲击还将诱发机械振动, 从而产生噪声。研究人员对水翼空化的特性及机理开展了大量的实验和数值模拟研究^[1-4]。研究表明: 片状空化的初生以及转变为云状空化均会对水翼产生极不稳定的冲击; 水翼表面的逆压梯度以及空泡相对于回射流的厚度对空化流动中回射流的不稳定性影响较大; 空化引起边界层分离, 促进生成涡结构, 从而产生流动不稳定性; 空化周期性的脱落激发了水翼表面的压力脉动, 且空化体积增大率为压力脉动的主要成因。

虽然空化现象在大多数场合是有危害的, 但在超空化状态下, 整个水下航行体被蒸汽 (或空气) 包裹, 由于蒸汽 (或空气) 的密度和黏度均小于水, 因而相对于航行体与水接触的摩擦阻力, 其在水中的航行阻力大大降低。在利用超空化技术实现水翼局部减阻方面, 美国于 1960 年提出超空化水翼艇的概念, 且成功进行了模型试验, 水翼的摩擦阻力大大减小, 这可以使水翼艇的航行速度提高一倍以上^[5]。Roohi 等^[6]在研究 Clark-Y 水翼的空化流动特性时, 发现在超空化状态下绕水翼空化的发展和脱落频率明显减低, 水翼表面的压力基本稳定, 且回射流变得较弱, 从而减小了在空泡闭合点处蒸汽的脱落, 同时随着超空泡长度和直径的增大, 空泡闭合处湍流不稳定性明显减弱。上述研究结果说明, 可以寻找一

种合适的方式可以使绕水翼空化快速达到超空化状态，且维持气液两相交界面的稳定。已有实验研究表明液体的表面张力会明显抑制空泡的生长，且加速空泡的溃灭，在此过程中产生较大的瞬时冲击力^[7]。因此，减小液体的表面张力为船舶航行时使绕水翼空化迅速达到超空化状态且保持稳定的有效手段。

有学者发现添加表面活性剂可以明显减小液体的表面张力^[8]。同时，某些表面活性剂具有剪切稀变特性和湍流减阻效应^[8]。这表明添加表面活性减阻剂不仅可以缩短空化初生至超空化的时间，而且可以减小航行时的摩擦阻力。目前，对表面活性剂促进空化现象的研究主要集中在模型简单的轴对称水下航行体，例如简化的水下航行器，鱼雷等。李凤臣等^[9-10]对此进行了大量数值模拟和实验研究，结果表明：在相同空化数下水下航行体在剪切稀变流体中形成的自然空泡不仅长度更长，而且空泡直径增大，同时航行的阻力明显减小，特别是摩擦阻力^[9-10]。因此，提出了应用剪切稀变流体促进绕水翼空化流动快速形成超空化流动的思想，探索剪切稀变流体对局部空化和超空化的影响及其机理。

2 空化流动控制方程

水翼在水中的运动是一种典型的湍流问题，其运动特性主要由 Navier-Stokes 方程描述。与直接数值模拟和雷诺平均数值模拟相比，大涡数值模拟（LES）不仅可以适当减少计算量，也可以获得更多细节信息。因此，本文采用 LES 方法对剪切稀变流体对绕水翼空化流动特性的影响进行数值模拟，并选用能够重现层流到湍流过渡和返回正确的壁渐近 y^{+3} 变化的 WALE 亚格子模型。本文采用 Schnerr-Sauer 空化模型对绕水翼空化流动的过程进行描述。具体采用的控制方程如下：

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m \bar{u}_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho_m \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_m \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\mu_t \bar{S}_{ij} \quad (3)$$

$$\mu_t = \rho_m L_s^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}} \quad (4)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad S_{ij}^d = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij}^2 + \bar{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{g}_{kk}^2, \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad L_s = \min(\kappa d, C_s V^{1/3}) \quad (5)$$

其中， ρ_m 和 μ_m 为混合相的密度和黏度； τ_{ij} 为亚格子应力； μ_t 为涡黏系数； $\bar{S}_{ij}$ 为变形率张量； L_s 为亚格子尺度的混合长度； κ 为冯卡门常数； d 为距壁面的最小距离； V 为计算单元的体积； C_s 为基于自由衰减各向同性均匀湍流校正的 WALE 常数，其值为 0.5。

在研究剪切稀变流体对绕水翼空化流动特性的影响，在数值模拟中需要描述期剪切粘度随剪切率变化的剪切稀变特性。本研究采用 Cross 黏度模型描述剪切稀变流体的剪切粘度随剪切率增大而减小的剪切稀变特性，具体表达式如下：

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^m} \quad (6)$$

其中, μ_0 为零剪切黏度; λ 为特征时间; $\dot{\gamma}$ 为剪切率; m 为幂律指数。本研究中各参数的取值来源于已有研究^[11]中对剪切稀变流体的剪切黏度的拟合结果, 具体数值为 $\mu_0 = 0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 、 $\lambda = 1 \text{ s}$ 和 $m = 0.7$ 。

3 计算模型及边界条件

本研究的水翼型号为 NACA66, 其为对称翼型, 弦长 $c=0.15\text{m}$, 水翼在距前缘 45%弦长处的相对最大厚度为 12%, 距前缘 50%处的相对最大拱度为 2%。图 1 给出了计算域及边界条件, 入口为速度入口, 上下边界为滑移壁面, 出口为压力出口, 水翼壁面为无滑移固体壁面。采用 30 万网格数进行二维数值模拟研究。

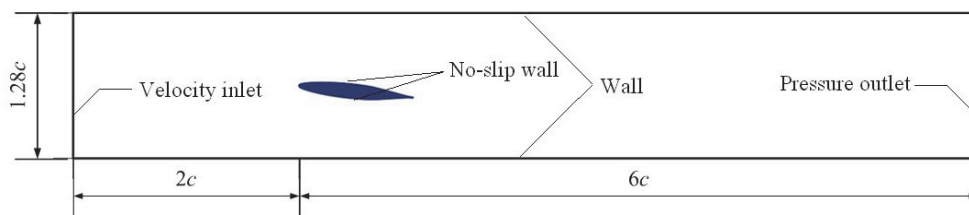


图 1 计算域示意图

在数值模拟中, 选用水和水蒸汽热力学性质国际标准^[12]中的 25℃下水和水蒸汽的物性参数作为液态水相和蒸汽相的热力学参数。由于剪切稀变流体中表面活性剂的浓度很低, 因此其密度和饱和蒸汽压可视为与液态水的物性相同。综上, 数值计算中各相的具体物性参数如表 1 所示。

表 1 水、水蒸汽、空气和减阻溶液的物性

项目	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$\mu \text{ (Pa}\cdot\text{s)}$	$p_v \text{ (Pa)}$
水	997	8.9011×10^{-4}	3169.9
水蒸汽	0.023075	9.8669×10^{-6}	--
剪切稀变流体	997	式(6)	3169.9

4 计算结果及分析

针对水中和剪切稀变流体中 8°攻角和两个不同速度下的绕水翼空化流动进行了数值模拟计算。当来流速度为 5.33m/s (空化数 $\sigma = 1.25$) 时, 空泡表现出周期性地生成、发展、脱落和溃灭, 此时的绕水翼空化呈现出云状空化的状态。图 2 给出了 $\sigma = 1.25$ 时一个完整周期 (T) 内水中和剪切稀变流体中绕水翼空化流动液相体积分数的分布, 从图 2 中可以看出, 剪切稀变流体中绕水翼云状空化的发展过程与水中的类似, 但由于剪切稀变流体的剪

切稀变特性, 剪切稀变流体中的空化程度更为剧烈。而当来流速度为 6.66m/s ($\sigma = 0.80$) 时, 水中和剪切稀变流体中的空泡均始终包裹住整个上翼面, 因而此时的绕水翼空化状态为超空化, 如图 3 中的液相体积分数云图所示, 并且从图 3 中还可以看出, 剪切稀变流体中的空泡尺寸要稍大于水中的空泡尺寸。

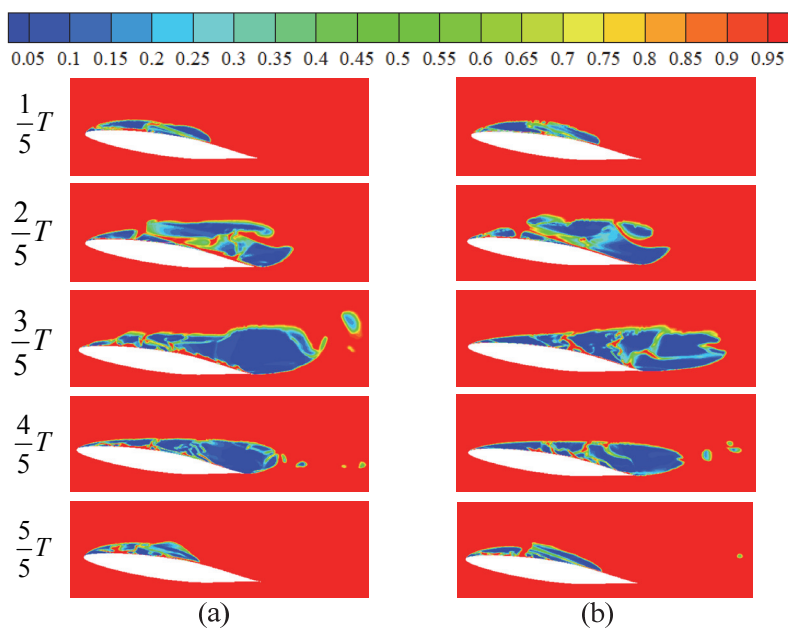


图 2 $\sigma = 1.25$ 时 (a) 水中和 (b) 剪切稀变流体中绕水翼空化流动液相体积分数分布

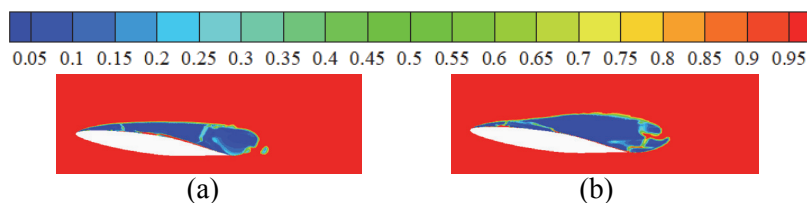
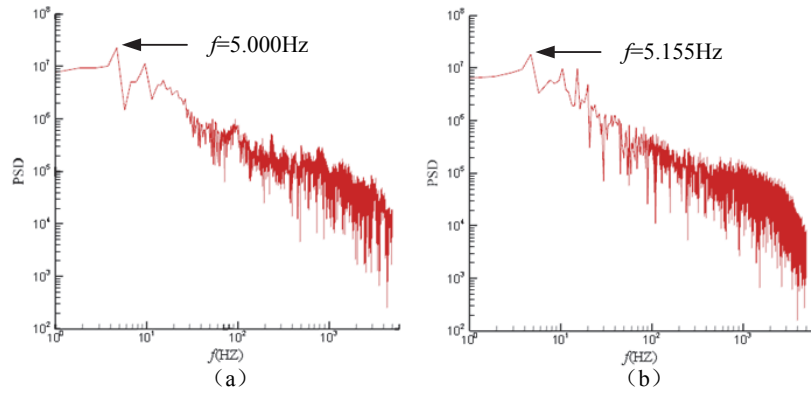
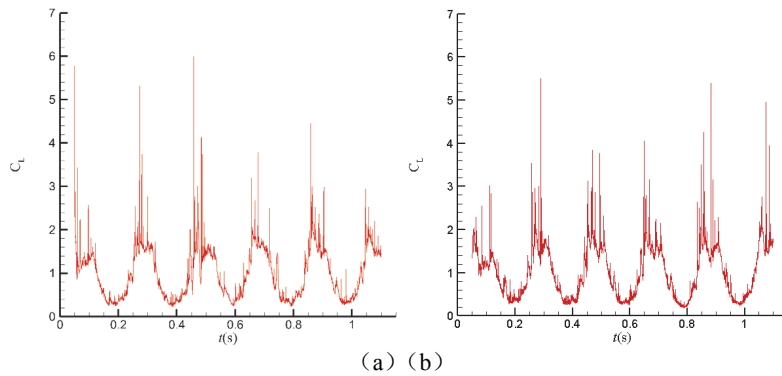
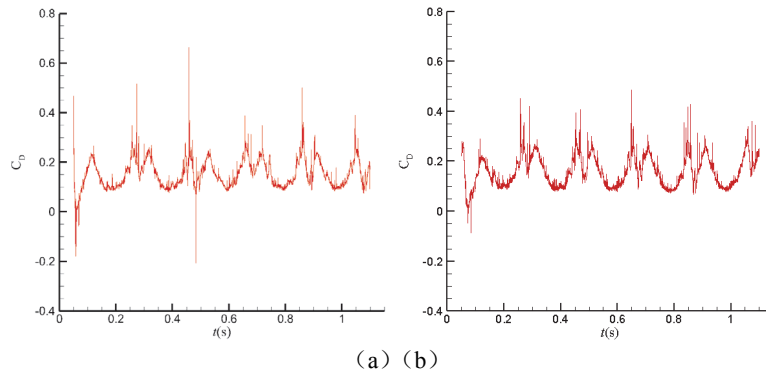


图 3 $\sigma = 0.80$ 时 (a) 水中和 (b) 剪切稀变流体中绕水翼空化流动液相体积分数分布

为了对云状空化下空泡的脱落特性进行进一步的定量分析, 检测了距离水翼前缘 $x/C=0.7$ 处的压力脉动, 并计算了 $\sigma = 1.25$ 时水中和剪切稀变流体中压力脉动的功率谱密度 (power spectrum density, PSD), 如图 4 所示。从图 4 中可以看出, 剪切稀变流体中的主频 5.155Hz 稍大于水中的主频 5.000Hz , 说明剪切稀变流体中空泡脱落的周期略小于水中空泡脱落的周期。

云状空化的发生会对水翼的水动力学性能产生巨大影响, 因此有必要对此时水翼所受到的升力和阻力进行分析, 图 5 和图 6 分别给出了 $\sigma = 1.25$ 时水中和剪切稀变流体中水翼的升力系数 C_L 和阻力系数 C_D 随时间的变化。通过比较可以看出, 剪切稀变流体对水翼升力系数的影响不太明显, 但明显减小了水翼的阻力系数, 这是由于剪切稀变溶液具有湍流减阻效应, 这使得水翼的升阻比增大, 从而可以使水翼获得更大的升力。

图4 $\sigma=1.25$ 时 (a) 水中和 (b) 剪切稀变流体中压力脉动的功率谱密度分布图5 $\sigma=1.25$ 时 (a) 水中和 (b) 剪切稀变流体中升力系数随时间的演化图6 $\sigma=1.25$ 时 (a) 水中和 (b) 剪切稀变流体中阻力系数随时间的演化

5 结论

通过采用 WALE 亚格子模型对相同攻角和不同速度下水中和剪切稀变流体中绕 NACA66 水翼空化流动进行大涡数值模拟, 探究了剪切稀变流体对云状空化和超空化状态下绕水翼空化流动特性的影响, 其中采用了 Cross 模型来描述剪切稀变流体剪切黏度随剪

切率增大而减小的特性, 针对数值模拟结果分析了空泡的形态特性以及水翼的升力和阻力特性, 得到了以下主要结论: ①剪切稀变流体促进了绕水翼空化的发展; ②对于云状空化工况, 相同空化数下剪切稀变流体中空泡脱落的周期比水中的小, 但剪切稀变流体对绕水翼超空化状态影响不大; ③剪切稀变流体对水翼升力系数的影响不太明显, 但明显减小了阻力系数。

参考文献

- 1 Yang J, Zhou L J, Wang Z W. Numerical simulation of three-dimensional cavitation around a hydrofoil. *J. Fluid Eng.-T. ASME*, 2011, 133: 081301.
- 2 Park S H, Rhee S H. Numerical analysis of the three-dimensional cloud cavitating flow around a twisted hydrofoil. *Fluid Dyn. Res.*, 2013, 45: 015502.
- 3 Ji B, Luo X W, Wu Y L, et al. Numerical investigation of three-dimensional cavitation evolution and excited pressure fluctuations around a twisted hydrofoil. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2014, 28(7): 2659-2668.
- 4 Ji B, Luo X W, Arndt Roger E A, et al. Large eddy simulation and theoretical investigations of the transient cavitating vertical flow structure around a NACA66 hydrofoil. *Int. J. Multiphas. Flow*, 2015, 68: 121-134.
- 5 杨敏官, 尹必行, 康灿. 绕水翼超空化流场的数值模拟. *江苏大学学报*, 2012, 33(1): 39-43.
- 6 Roohi E, Zahiri A P, Passandideh-Fard M. Numerical simulation of cavitation around a two-dimensional hydrofoil using VOF method and LES turbulence model. *Appl. Math. Model.*, 2013, 37: 6469-6488.
- 7 贺杰. 表面张力对光致空泡动力学特性影响的实验研究. 南京理工大学, 硕士学位论文, 2008.
- 8 Li F C, Yu B, Wei J J, et al. Turbulent drag reduction by surfactant additives. *John Wiley & Sons (Asia) Pet Ltd.*, 2012, 183-184.
- 9 Jiang C X, Li F C. Numerical study of natural supercavitation influenced by rheological properties of turbulent drag-reducing additives. *Adv. Mech. Eng.*, 2014, 2014: 275316.
- 10 邹志林. 表面活性剂减阻剂对超空泡特性影响实验研究. 硕士学位论文, 哈尔滨工业大学, 2009.

Study on the influence of shear-thinning fluid on the characteristics of cavitating flow around hydrofoil

WANG Lu¹, WANG Shun¹, LIU Ping-an¹, ZHENG Zhi-ying²

(1. College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001.

Email: wang-lu@hrbeu.edu.cn

2. School of Energy Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001.)

Abstract: The influence of shear-thinning fluid on the characteristics of cavitating flow around NACA66 hydrofoil was studied by large eddy simulation (WALE subgrid-scale model) in this paper. The Cross viscosity model is used as a generalized Newtonian fluid model to describe the shear-thinning characteristic of the fluid in which the shear viscosity decreases with the increase of shear rate. It is found that the shear-thinning fluid can promote the development of the cavitation around the hydrofoil. The shedding period of the cloud cavitation in the shear-thinning fluid was smaller than that in the water at the same cavitation number. However, the shear-thinning fluid had little influence on the supercavitation around the hydrofoil. Besides, shear-thinning fluid decreased the drag coefficient of the hydrofoil and had little influence on the lift coefficient. This study will provide the basis for a new technique of controlling cavitation flow by shear-thinning fluid.

Key words: Shear-thinning fluid; Hydrofoil; Cloud cavitation; Drag reduction.

仿生表面结构对水翼水动力特性的影响研究

刘洋, 陈帅, 王于, 颜培凯, 于凯*

(哈尔滨工程大学 船舶工程学院, 哈尔滨, 150001, Email: yukai@hrbeu.edu.cn)

摘要: 本文对鲨鱼皮表面的盾鳞结构水动力特性进行研究, 并将仿生表面结构运用到水翼上, 研究仿生表面结构对水翼水动力特性的影响。将 0.1mm 高度的单个仿生表面结构置于平板上, 通过不同流速下的数值计算, 研究其减阻机理。再将大小为高 1mm 的仿生表面结构按一排布置到翼型吸力面 1/4 位置处, 利用数值模拟方法从升阻力性能和速度云图、压力云图情况分析仿生表面结构对 NACA0012 翼型的影响, 最终确定仿生表面结构在低攻角下($0^\circ - 9^\circ$)使翼型升阻比降低, 在高攻角下($12^\circ \sim 21^\circ$)使升阻比增加。

关键词: 仿生结构; NACA 翼型; 水动力性能; 升阻比

1 引言

快速游泳的鲨鱼表面具有低阻力和防污的特性, 因为它具有表面盾鳞微结构、弯曲的鳞片和黏液层。鲨鱼皮肤上叫做盾鳞的鳞片, 上面覆盖着与游动方向平行的特殊大小和间隔的小棱。人们认为, 在黏滞子层中, 这种结构能够抬升和固定自然产生的流体旋涡, 降低总剪切应力。因为涡旋只接触小的棱尖, 而不是总表面积, 减少了流体的横向流动和从黏滞子层喷出的旋涡, 从而减少了能量损失。这些特性使鲨鱼能够在低能量输入的情况下在水中快速移动, 并保持水面不受生物侵蚀。由于其他流体也存在湍流旋涡, 因此鲨鱼的盾鳞结构在空气中也可以起到类似的减阻和防污的作用。

研究发现盾鳞的影响类似于沟槽减阻, 沟槽减阻已经有了较长的研究历史, 已经证实了有效性, 可以产生 10%左右的减阻效果^[1]。最近, Wen 和 Lauder 使用三维打印机在基板上构建了更具体的盾鳞, 最大减阻约为 9%^[2]。据学者研究, 生物附着厚度增加 0.1mm, 阻力增加约 5%~15%^[3]。1mm 厚的生物附着会增加 80%的摩擦阻力^[4]。开展鲨鱼皮仿生表面结构的水动力特性的研究, 对提高人造结构的性能有重要的意义。并且翼型作为船舶、航空、建筑等领域常见的结构形式, 在减摇鳍、舵、机翼、螺旋桨、涡轮机、桥梁、风机等得到了广泛采用, 因此, 研究仿生表面结构对翼型的水动力特性影响具有重要的意义。

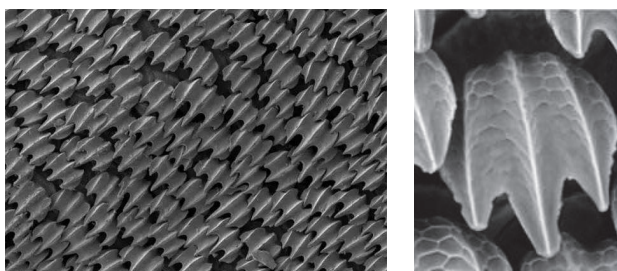
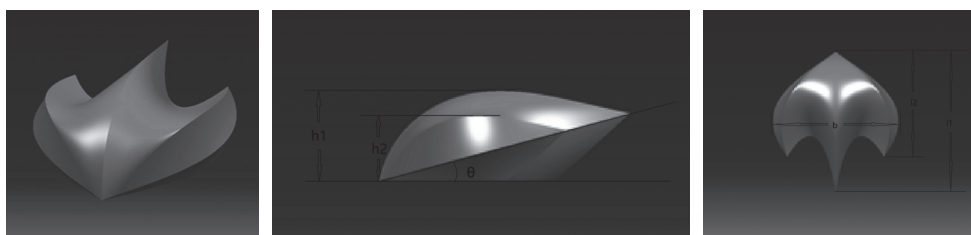


图1 显微镜下的鲨鱼皮及其单个盾鳞结构

2 仿生表面结构数值模拟研究

2.1 仿生结构建模

本文选取典型的短鳍灰鲭鲨的三脊弧形沟槽盾鳞结构作为仿生研究对象，其特征是结构对称，有中间的主脊和两侧的侧脊，主脊高度高于侧脊，整个盾鳞结构首部窄、尾部宽，中部高、首尾低，并且两脊间具有明显的沟槽^[5]。仿生表面结构的结构图(图2)。



(A) 仿生表面结构三维图

(B) 仿生表面结构侧视图

(C) 仿生表面结构俯视图

图2 仿生表面结构的结构及形状参数

基于鲨鱼盾鳞结构的特点，提取主脊高度 h_1 、侧脊高度 h_2 、主脊纵向长度 l_1 、侧脊纵向长度 l_2 、总宽度 b ，倾斜角度 θ 作为仿生表面结构的形状参数，各参数定义如图所示，并参考盾鳞实际尺寸建模，各参数大小见表1。

表1 仿生表面结构的形状参数

$l_1(\mu\text{m})$	$l_2(\mu\text{m})$	$h_1(\mu\text{m})$	$h_2(\mu\text{m})$	$b(\mu\text{m})$	$\theta(^{\circ})$
110	80	40	30	100	15

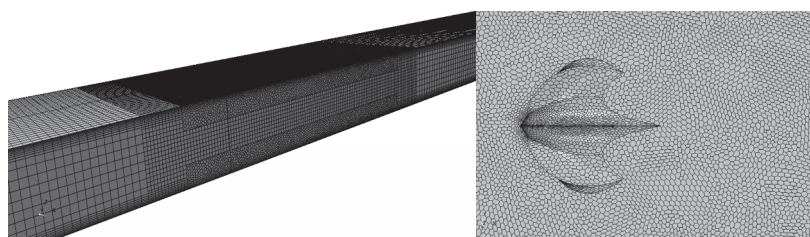
国内外研究表明，对于一般的沟槽结构，减阻效果和沟槽的相对高度 h^+ 及沟槽相对间距 s^+ 密切相关，当 $h^+ \leq 25$ 、 $s^+ \leq 30$ 时沟槽具有减阻特性^[6-8]。推导得出仿生表面结构的相对高度为：

$$h^+ = \frac{0.172hURe^{-1/10}}{\nu} \quad (1)$$

式中, h 为沟槽高度; Re 为雷诺数; ν 为运动黏性系数; V_τ 为壁面剪切速度。参考沟槽结构的相对高度, 将仿生表面结构的高度设定为 0.1mm

2.2 计算域及网格划分

本文将计算域高度设置为 1mm, 并且将计算域分为首尾的过渡段和中间的试验段。其中, 试验段平板长 5mm, 宽 3mm, 过渡段首部长 100mm, 尾部长 15mm。计算域以来流方向为 X 轴正方向, 以高度方向为 Z 方向, 仿生表面结构首部迎流, 和来流方向平行布置在底部平板上。计算域网格划分形式见图 3。



(A) 整体网格示意图

(B) 仿生表面结构面网格示意图

图 3 网格划分形式

2.3 计算结果分析

为了确定网格数目能够满足数值模拟要求, 选取 $V=5\text{m/s}$ 的工况下对带有仿生表面结构的平板进行数值计算, 分梯度生成 5 套数目不同的网格进行无关性分析, 分别为 83W、125W、162W、201W 及 248W, 检测该工况下选用不同网格时平板所受的阻力 (表 2)。

表 2 不同数目的网格下带有仿生表面结构的平板阻力

网格数 (W)	83	125	162	201	248
阻力 (10^{-3}N)	2.0807	2.0786	2.0784	2.0784	2.0784

考虑到计算资源的限制, 选择 201w 网格用于仿生表面结构的数值模拟。流速在 1m/s 到 10m/s 内选取, 根据计算结果做不同速度下平板阻力 (图 4)。

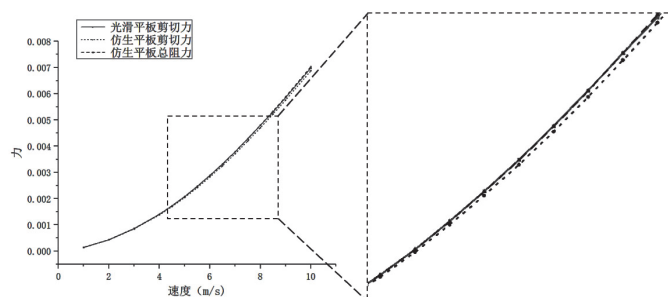


图 4 不同速度下的阻力

由图 4 可知, 带有仿生表面结构的平板的剪切阻力明显小于光滑平板的剪切阻力, 并且当流速 5m/s 到 8m/s 的区间内, 减小的剪切力大于增加的压差阻力, 仿生表面结构起到

减阻作用，对应的雷诺数约为 $(5\sim 8) \times 10^5$ 。

3 带有仿生表面结构翼型数值模拟研究

3.1 带有仿生表面结构的翼型建模

机翼选取 NACA0012 翼型，国内外很多学者对其水性能进行了研究^[9-10]。完成光滑翼型的建模后，将一定大小的仿生表面结构按一列布置在光滑三维机翼 1/4 弦长处。仿生表面结构长 6mm，高 1.6mm，间距 8.7mm，和翼型同方向布置（图 5）。

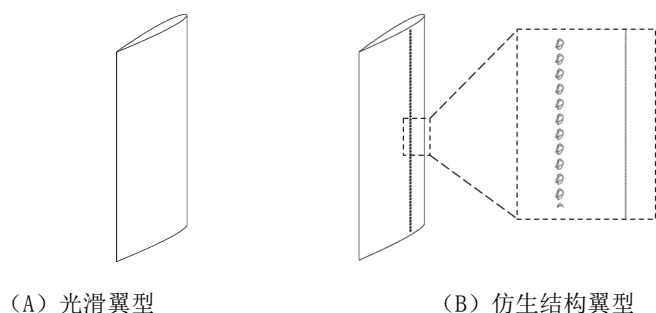


图 5 翼型建模

3.2 计算域及网格划分

以流速方向为 X 轴正方向，三维翼型高度方向为 Z 方向，吸力面方向为 y 方向正方向建立坐标，翼型弦长为 204mm，计算域长度设置为 13 倍弦长，其中，在机翼中心到入口距离为三倍弦长，到出口距离为 10 倍弦长，宽度设置为 8 倍弦长，高度设置为 8 倍弦长。采用切割体网格和棱柱层网格生成器，并且建立 3 个依次增大的加密区域，保证选取的网格划分方式、加密区和网格参数一致。其网格划分情见（图 6）。

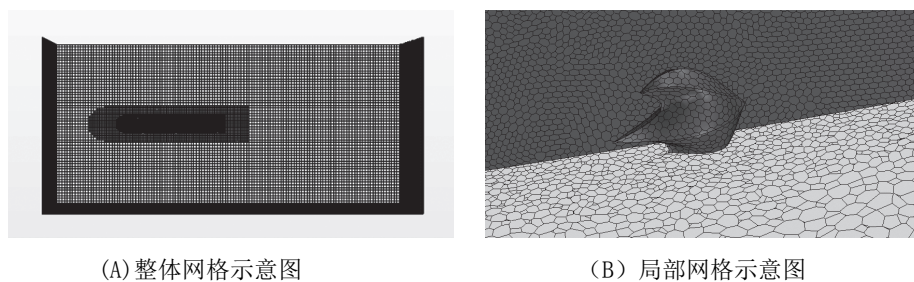


图 6 网格示意图

3.3 计算结果分析

为了确定网格数目能够满足数值模拟要求，选取 $V = 0.5\text{m/s}$ ，攻角 $\alpha = 6^\circ$ 的工况，分梯度生成 5 套数目不同的网格进行无关性分析，分别为 79W、112W、158W、224W 及 261W，数值计算检测该工况下选用不同网格时平板所受的阻力（表 3）。

表3 流速 0.5m/s 攻角 6° 时不同网格数下翼型阻力值

网格数 (W)	79	112	158	224	261
阻力 (N)	0.2292	0.2468	0.2561	0.2576	0.2577

对光滑三维翼型和带有仿生表面结构的翼型在流体中的水动力特性情况进行数值模拟, 以分析仿生表面结构对水动力特性的影响, 模拟选取流速为 0.5m/s, 针对 0/3/6/9/12/15/18/21° 不同攻角情况进行仿真分析, 得到各个工况下的阻力和升力。比较光滑翼型和带有仿生表面结构的翼型三种计算模型的升阻力系数, 并做升阻力系数曲线图(图7)。

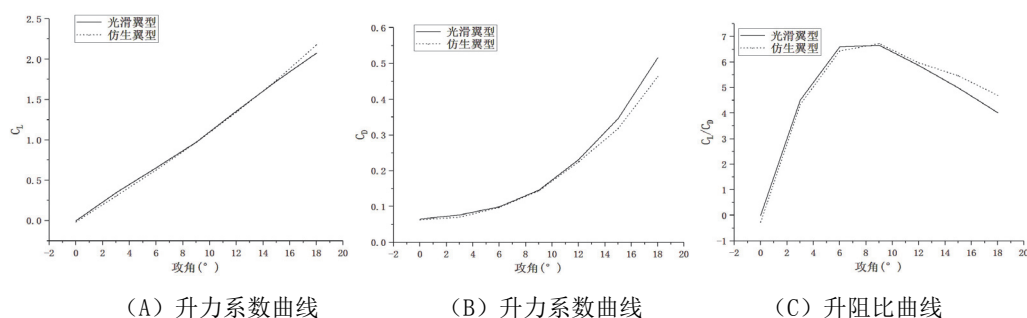


图7 流速 0.5m/s 时不同翼型的升阻力曲线

如图7所示, 仿生表面结构对翼型升力性能影响较小, 对阻力性能影响较大。具体来看, 仿生表面结构在攻角为 15° 和 18° 时起到增加升力的作用, 而在小攻角下均起到减小升力的作用, 但是对升力的减小和增大情况均不显著; 由阻力系数曲线可知, 仿生表面结构会显著的减小阻力, 并且在所有角度下均起作用; 由升力和阻力共同作用, 使得仿生表面结构在攻角为 9° 到 18° 时升阻比增大, 并且攻角越大对升阻比的提高越明显。

选取攻角为 0° 和 12° 的工况, 探究光滑翼型和带有仿生表面结构的翼型的流场情况。由图8和9所示的速度云图和压力云图可以看出, 在攻角为 0° 时, 仿生表面结构在其后一定区域内形成了静流区, 可以起到减阻的作用。

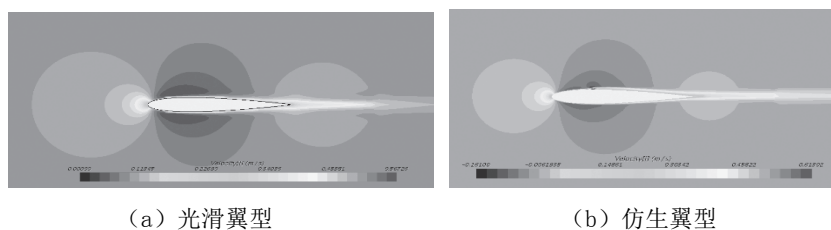


图8 攻角为 0° 的速度场

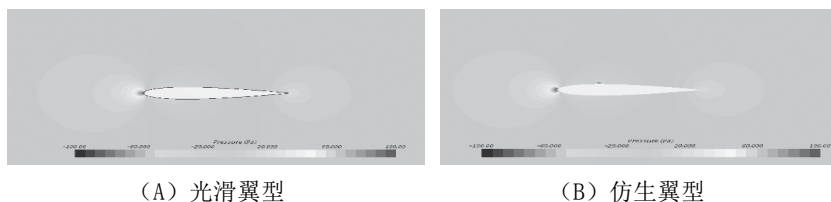


图9 攻角为 0° 的压力场

由图 10 的速度云图和 11 的压力云图可以看出, 攻角为 12° 时会在仿生表面结构后抬升边界层, 并在一定区域内形成静流区, 起到减小阻力的作用。

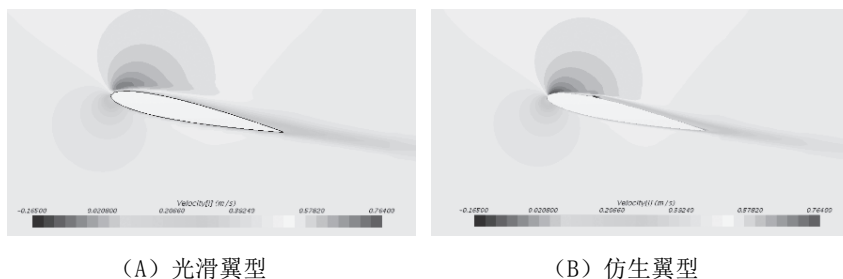


图 10 攻角为 12° 的速度场

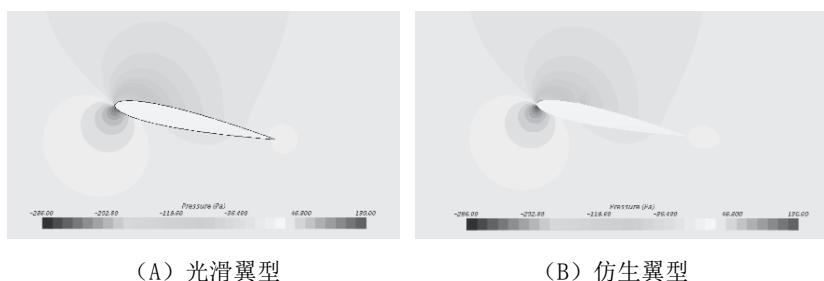


图 11 攻角为 12° 的压力场

4 结论

主要研究了仿生表面结构的水动力特性及其在水翼上的应用, 首先根据鲨鱼皮表面盾鳞结构建立了仿生表面结构的模型, 然后利用数值计算方法论证了其减阻机理, 并将建立的仿生表面结构应用到水翼上, 分别进行了各攻角下的数值计算。具体得到以下结论。

(1) 利用数值模拟方法论证了仿生表面结构的减阻机理, 带有仿生表面结构的平板的剪切阻力明显小于光滑平板的剪切阻力, 并且当流速 5m/s 到 8m/s 的区间内, 减小的剪切力大于增加的压差阻力, 仿生表面结构起到减阻作用, 对应的雷诺数约为 $(5\sim 8) \times 10^5$ 。

(2) 建立了 NACA0012 三维水翼模型, 并将大小为高 1mm 的仿生表面结构按一排布置到翼型吸力面 $1/4$ 位置处, 再利用数值模拟方法研究从升阻力性能和速度云图、压力云图情况分析仿生表面结构对 NACA0012 翼型的影响, 最终确定仿生表面结构在低攻角下 ($0^\circ \sim 9^\circ$) 使翼型升阻比降低, 在高攻角下 ($12^\circ \sim 21^\circ$) 使升阻比增加。

参考文献

- 1 Raschi W G , Musick J A . Hydrodynamic aspects of shark scales[J]. Nasa Sti/recon Technical Report N,

- 1986, 86.
- 2 Wen L , Weaver J C , Lauder G V . Biomimetic shark skin: design, fabrication and hydrodynamic function[J]. Journal of Experimental Biology, 2014, 217(10):1656-1666.
 - 3 W.G. Characklis, K.C. Marshall, Biofilms, Wiley, New York, 1990.
 - 4 D.P. Gordon, S.F. Mawatari, Atlas of Marine-Fouling Bryozoa of New Zealand Ports and Harbours, Miscellaneous Pub., New Zealand Oceanographic Institute, 1992.
 - 5 刘博, LiuBo. 快速鲨鱼盾鳞的扫描电镜表征研究[J]. 河北渔业, 2008(7):19-22.
 - 6 Walsh M J. Turbulent boundary layer drag reduction using riblets[C]// Aiaa, Aerospace Sciences Meeting. 1982.
 - 7 Walsh, Michael J . Riblets as a Viscous Drag Reduction Technique[J]. AIAA Journal, 1983, 21(4):485-486.
 - 8 Walsh M, Lindemann A. Optimization and application of riblets for turbulent drag reduction[C]// 1984.
 - 9 吴鋆, 李天, 王晋军. 低 Reynolds 数 NACA0012 翼型绕流的流动特性分析[J]. 实验力学, 2014, 29(3):265-272.
 - 10 刘阳. 低雷诺数下绕 NACA0012 翼型流的直接数值模拟[D]. 沈阳: 沈阳航空航天大学, 2018.

Study on the effect of bionic surface structure on hydrodynamic properties of hydrofoil

LIU Yang, CHEN Shuai, WANG Yu, YAN Pei-kai, YU Kai*

(Shipbuilding and Oceanography Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, 150001.

Email: yukai@hrbeu.edu.cn)

Abstract: In this paper, we studied the hydrodynamic characteristics of the shield scale structure on the surface of shark skin, and the bionic surface structure is applied to the hydrofoil to study the influence of the bionic surface structure on the hydrodynamic characteristics of the hydrofoil. A single bionic surface structure with a height of 0.1mm was placed on a flat plate, and the drag reduction mechanism was studied by numerical calculation at different flow rates. Then, the bionic surface structure with a size of 1mm in height is arranged in a row to the 1/4 position of the airfoil suction surface, and the influence of the bionic surface structure on the NACA0012 airfoil is analyzed from the performance of lift resistance performance and velocity cloud diagram and pressure cloud diagram using numerical simulation methods. Finally, it was determined that the bionic surface structure reduced the airfoil lift-to-drag ratio at low angles of attack (0° - 9°) and increased the lift-drag ratio at high angles of attack (12° - 21°).

Key words: Bionic structure; NACA airfoil; Hydrodynamic performance; Lift-to-drag ratio.

波浪中带窄缝浮冰水弹性响应的 解析研究¹

邝庆文, 宁德志, 张崇伟*

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 大连, 116024, *Email: chongweizhang@dlut.edu.cn)

摘要: 本研究考虑有限深水域中浮冰在波浪中的水动力特性。针对带窄缝的有限长弹性浮冰问题, 基于线性势流理论和有限长弹性板假设建立数学模型, 并利用特征函数展开法进行解析求解。围绕两种具体工况, 研究了窄缝位置对波浪透射系数和浮冰应变响应的影响, 并与无窄缝浮冰的情况进行了对比分析。结果表明: 带窄缝弹性浮冰的波浪透射系数曲线随波数的增加而发生振荡变化, 部分波况条件下会出现波浪全透射现象, 但未出现波浪全反射现象; 不同窄缝位置引起的浮冰中应变分布差异巨大, 且随着入射波波数的增加, 各块浮冰的应变响应均呈现从低阶模态到高阶模态的连续转变过程。

关键词: 海冰; 窄缝; 水弹性; 势流理论; 特征函数展开

1 引言

随着全球变暖的加剧, 北极航道的开辟已成为近年的热点议题, 波浪与海冰的相互作用问题也成为当前的重要研究领域。许多学者已采用解析方法在该领域开展了广泛研究, 如 Sahoo 等^[1]引入一个满足正交性特性的内积函数, 研究了波浪与半无限长海冰的相互作用; Meylan 和 Squire^[2]运用格林函数法研究了波浪对有限长浮冰的作用, 发现在某些具体波况下的波浪全透射现象, 对应浮冰的应变达到最大值; Squire 和 Dixon^[3]研究了无限长海冰上的窄缝对波浪传播的影响, 发现窄缝可“优长波、抑短波”, 并出现波浪全透射; Li

¹ 基金项目: 国家自然科学基金(51709038、51739010 和 51679036)、中国博士后科学基金(2018M630289 和 2019T120209)、中央高校基本科研业务费专项资金(DUT19RC(4)027)资助项目。

等^[4-5]分析了无限长带窄缝冰盖下圆柱的水动力特性,研究表明窄缝位置对冰下潜体的运动响应也有重要影响。对于带窄缝浮冰问题,前期研究多关注了无限长海冰的情况,将针对有限长浮冰的情况开展进一步研究。基于线性势流理论和有限长弹性板假设建立数学模型,并利用特征函数展开法进行解析求解,特别围绕两种具体工况研究了窄缝位置对波浪透射系数和浮冰应变响应的影响。

2 数学模型

考虑水深为 d 的二维开阔水域,波浪从左向右传播。水面漂浮冰板总长为 b ,冰板中有一个宽度为 Ds 的窄缝,将冰板分割为长度分别为 b_1 和 b_2 的左、边两片冰板。采用薄板模型假设,将海冰简化为密度均匀且端部自由的弹性板,并忽略冰板吃水。如图 1 所示,建立笛卡尔坐标系 Oxz ,其中原点 O 位于海冰左端, Ox 轴位于静水面, Oz 轴垂直指向上方。窄缝左、右两端横坐标设为 $x=x_0$ 和 x_1 。为了数学描述,引入 $a_1 = b_1 + Ds$, $a_2 = a_1 + b_2$, $L = b - Ds$ 。

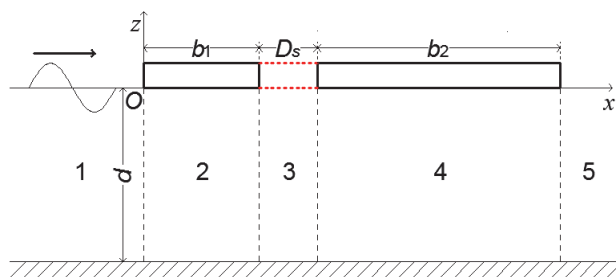


图 1 波浪中带窄缝冰板模型示意图与坐标系说明

忽略流体黏性和可压缩性,假设流动无旋且流体和弹性板做微幅稳态振动,则可在势流理论框架下描述该流场运动,引入速度势 $\Phi(x, z, t)$ 并分离时间项 t 后得到:

$$\Phi(x, z, t) = \text{Re}\{\phi(x, z)e^{-i\omega t}\} \quad (1)$$

其中, ω 为波浪运动角频率, ϕ 为空间复速度势。将整个流域划分成 5 个子域,各个子域 V_j 的物理量分别用下标 $j = 1, 2, 3, 4$ 和 5 标识。各子域中空间复速度势,满足如下边值问题:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi_j &= 0; V_j; j = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
\frac{\partial \phi_j}{\partial z} &= \frac{\omega^2}{g} \phi_j; z = 0; j = \{1, 3, 5\} \\
(K \frac{\partial^4}{\partial x^4} + W) \frac{\partial \phi_j}{\partial z} - \phi_j &= 0; z = 0; j = \{2, 4\} \\
\frac{\partial \phi_j}{\partial z} &= 0; z = -d; j = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
\frac{\partial^3 \phi_j}{\partial x^2 \partial z} &= 0, \frac{\partial^4 \phi_j}{\partial x^3 \partial z} = 0; x = \{0, b_1, a_1, a_2\}; z = 0; j = \{2, 4\}
\end{aligned} \tag{2}$$

运用特征函数展开法可得到如下空间复速度势的表达式：

$$\phi_1(x, z) = -\frac{igA}{\omega} [(e^{ik_0 x} + R_0 e^{-ik_0 x}) Z_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{k_m x} Z_m(z)] \tag{3}$$

$$\phi_2(x, z) = -\frac{igA}{\omega} [(A_0 e^{i\lambda_0 x} + B_0 e^{-i\lambda_0(x-b_1)}) Y_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\lambda_n x} + B_n e^{\lambda_n(x-b_1)}) Y_n(z)] \tag{4}$$

$$\phi_3(x, z) = -\frac{igA}{\omega} [(C_0 e^{ik_0(x-b_1)} + D_0 e^{-ik_0(x-a_1)}) Z_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m e^{-k_m(x-b_1)} + D_m e^{k_m(x-a_1)}) Z_m(z)] \tag{5}$$

$$\phi_4(x, z) = -\frac{igA}{\omega} [(E_0 e^{i\lambda_0(x-a_1)} + F_0 e^{-i\lambda_0(x-a_2)}) Y_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n e^{-\lambda_n(x-a_1)} + F_n e^{\lambda_n(x-a_2)}) Y_n(z)] \tag{6}$$

$$\phi_5(x, z) = -\frac{igA}{\omega} [T_0 e^{ik_0(x-a_2)} Z_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{-k_m(x-a_2)} Z_m(z)] \tag{7}$$

式中各项系数以及垂向特征函数可参照 Teng 等^[6]。由于弹性板下的垂向特征函数不具备正交性，引入一个新的具有正交性的垂向特征函数^[6]。在各子流域交界面处进行速度势和法向速度匹配，并沿水深方向进行内积计算，利用各子域内特征函数的正交性特性，得到一系列的线性方程组，通过求解该线性方程组可得到相应的未知系数。

3 结果分析与讨论

3.1 无窄缝弹性浮冰的波浪反射

Meylan 和 Squire^[2]运用格林函数方法研究了波浪中有限长浮冰的反射系数。本研究数学模型对相同问题展开计算，并通过与文献结果对比来验证本研究解析求解的准确性。图 2 给出了本研究 and Meylan 和 Squire^[2]方法计算得到的反射系数 $R = |R_0|$ 随浮冰长度 b 的变化，图中可见，本方法与文献结果吻合良好，验证了本研究解析方法的可靠性。

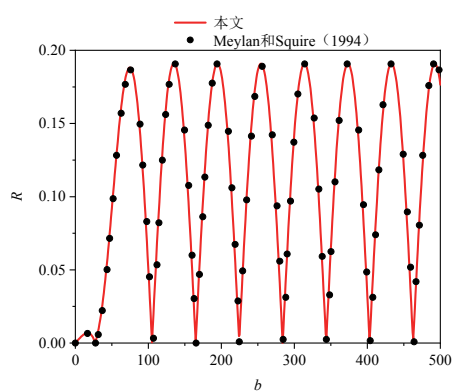


图2 无窄缝弹性浮冰的反射系数

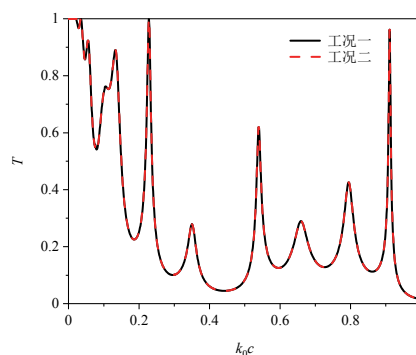


图3 带窄缝弹性浮冰的透射系数

3.2 带窄缝弹性浮冰的波浪透射

本研究数学模型可以考虑浮冰表面任意位置的窄缝情况。下面讨论两种窄缝位置对弹性冰板水动力响应的影响，其中，工况一设置 $x_0 = 1/3 L$ ，工况二设置 $x_0 = 2/3 L$ 。所考虑两种工况的窄缝位置关于有限长浮冰的几何中心对称。计算域和浮冰参数设置为： $d = 10\text{m}$ ， $EI/\rho g d^4 = 0.005$ ， $c/d = 0.01$ ， $b/d = 4$ ， $D_s/d = 0.1$ ， $A = 1$ 。图 3 对比了两种工况下弹性浮冰在波浪中的透射系数。由图中结果可知，工况一和工况二的透射系数相同，即到浮冰几何中心点距离相同的窄缝，所引起的波浪透射系数相同。这与势流理论框架下刚性结构的波浪透射特性保持一致，即二维波浪的传播方向不对结构的波浪透射系数产生影响^[7]。图中显示，透射系数曲线会随波数的增加而发生振荡变化。部分波况条件下，出现透射系数为 1 的波浪全透射现象，表面带窄缝弹性浮冰的存在未对传播波浪的幅值产生影响；在所考虑波况范围内，未发现透射系数为 0 即波浪全反射现象。

3.3 带窄缝弹性浮冰的应变响应

浮冰在波浪的作用下会发生不同程度的弹性变形，浮冰的应变 S_T 可通过下式求解

$$S_{Tj} = \frac{c}{2\omega} \left| \frac{\partial^3 \phi_j}{\partial x^2 \partial z} \right|_{z=0}, j = 2 \text{ 和 } 4 \quad (8)$$

图 4 和图 5 分别给出了两种工况条件下，浮冰中应变沿波浪传播方向的分布云图。其中，纵坐标对应入射波波数，深蓝色和亮黄色分别对应浮冰中的最小和最大应变值，将窄缝位置处的应变值设置为 0。由图可知，虽然到浮冰几何中心点距离相同的窄缝可引起相同的波浪透射系数，但不同窄缝位置引起的浮冰中应变分布差异巨大。随着入射波波数的增加，各工况下两块浮冰的应变响应连续从低阶模态转换为高阶模态，节点线分布明显。具体而言，在图中所考虑的波数范围内，短冰板的应变响应从一阶模态转变为二阶模态，而长冰板则从一阶模态开始连续转变直至五阶模态。另外，任意一块冰板的应变响应达到共振状态时，都会导致另一块出现较大的应变幅值，尽管另一块冰板的应变响应此时未发生共振。

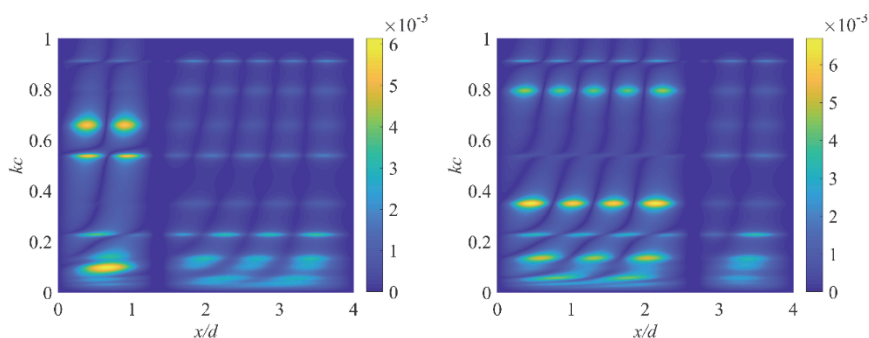


图 4 带窄缝弹性浮冰的应变响应（工况一）

图 5 带窄缝弹性浮冰的应变响应（工况二）

4 结论

基于线性势流理论和有限长弹性板模型，利用特征函数展开法求解了波浪中带窄缝浮冰水弹性响应的解析解，讨论了窄缝位置对波浪透射系数和海冰应变响应的影响，并与无窄缝海冰的情况进行对比验证。论文具体分析了两种带窄缝弹性浮冰的工况，研究表明：①到浮冰几何中心点距离相同的窄缝，所引起的波浪透射系数相同；②透射系数曲线随波数的增加而发生振荡变化，部分波况条件下会出现波浪全透射现象，但未发现波浪全反射现象；③不同窄缝位置引起的浮冰中应变分布差异巨大，且随着入射波波数的增加，各工况下两块浮冰的应变响应连续从低阶模态转换为高阶模态；④由窄缝分割后，任意一块冰板的应变响应达到共振状态时，都会导致另一块出现较大的应变幅值。

参考文献

- 1 Sahoo T, Yip TL, Chwang AT. Scattering of surface waves by a semi-infinite floating elastic plate. *Physics of Fluids*., 2001, 13(11): 3215-3222.
- 2 Meylan M, Squire, VA. The response of ice floes to ocean waves. *Journal of Geophysical Research*., 1994, 99(C1): 891-900.
- 3 Squire VA, Dixon, TW. An analytic model for wave propagation across a crack in an ice sheet., *International Journal of Offshore and Polar Engineering*., 2001, 10(3): 173-176.
- 4 Li ZF, Wu GX, Ji CY. Wave radiation and diffraction by a circular cylinder submerged below an ice sheet with a crack. *Journal Fluid of Mechanics*., 2018, 845: 682-712.
- 5 Li ZF, Wu GX, Ji CY. Interaction of wave with a body submerged below an ice sheet with multiple arbitrarily spaced cracks. *Physics of Fluids*., 2018, 30: 057107.
- 6 Teng B, Chen L, Liu SX, Li FJ. Modified eigenfunction expansion methods of water waves with a semi-infinite elastic plate. *Applied Ocean Research*., 2001, 23: 357-368.
- 7 Kreisel G. Surface wave. *Quarterly of Applied Mathematics*., 1949, VII(1): 21-44.

Analytical investigation of wave-induced hydroelastic response of ice sheets with a gap

KUANG Qing-wen, NING De-zhi, ZHANG Chong-wei*

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, 116024.

*Email: chongweizhang@dlut.edu.cn)

Abstract: This study considers hydrodynamic characteristics of floating ice sheets in waves of a finite depth water. For a finite-length elastic ice sheet with the narrow slit, a mathematical model is established based on the linear potential-flow theory and the finite-length elastic plate hypothesis. The model is solved analytically using the characteristic function expansion method. Focusing on two specific working conditions, effects of the slit position on the wave transmission coefficient and strain response of the ice sheet are studied. Comparison with the case without slit is also conducted. The results show that the wave transmission coefficient of the elastic ice sheet with a slit oscillates with the increase of wave number. Under some wave conditions, pure wave transmission phenomenon occurs, but pure wave reflection phenomenon is not observed. Position of the slit can evidently affect the strain distribution in an ice sheet. With the increase of the incident wave number, the strain response of each ice piece around the slit shows a continuous transition process from low-order to high-order vibration modes.

Key words: Sea ice; narrow gap; hydroelasticity; potential-flow theory; eigenfunction expansion.

水下超疏水表面平板边界层自然转捩位置的数值研究¹

刘斌^{1,2}, 张永明^{1,2,3,*}

(1. 天津大学 高速空气动力学研究室, 天津 300072;

2. 天津大学 力学系, 天津 300072;

3. 天津市现代工程力学重点实验室, 天津 300072, Email: ymzh@tju.edu.cn)

摘要: 已有研究表明, 水下航行体首部流动噪声与首部边界层转捩位置密切相关。本文用数值方法研究了超疏水表面平板边界层自然转捩位置, 希望为工程上找到控制首部流动噪声的有效途径提供理论支持。先使用迭代法结合打靶法计算超疏水表面平板边界层从前缘到下游整个计算域内的层流速度剖面, 壁面上使用滑移速度边界条件求解 Blasius 方程。发现相对于普通表面, 超疏水表面使边界层变得更薄。然后对超疏水表面的层流边界层进行线性稳定性分析, 此时对扰动在壁面处也使用滑移速度边界条件, 再基于稳定性分析的结果用半经验的 e^N 方法预测自然转捩的位置。发现超疏水表面边界层中, 仍是二维扰动最不穩定。超疏水表面对层流稳定性和自然转捩位置都有明显影响, 滑移长度越大, 流动失稳临界位置越靠下游, 不稳定区越小, 自然转捩发生位置也相应地更靠后, 这表明超疏水表面有延迟自然转捩的效果。而且转捩延迟效果随滑移长度增大而越发显著。本文还研究了来流速度对超疏水表面平板边界层自然转捩位置的影响。发现随着来流速度的升高, 不稳定区的频率升高; 不稳定区范围扩大; 不稳定区的临界位置先向上游移动再向下游移动, 但是临界位置的变化相对并不显著。发现超疏水表面与普通表面不同, 随着来流速度增大, 转捩位置先向上游移动, 然后再向下游移动, 其中存在一个“最危险”的来流速度, 此时转捩位置最靠前。而随着来流速度的升高, 超疏水表面的转捩延迟效果也是更为明显。

关键词: 超疏水表面; 平板边界层; 流动稳定性; 自然转捩; e^N 方法

1 引言

水下超疏水表面平板边界层的自然转捩, 目前处在流体力学研究的前沿; 同时, 又因为与水下航行体首部流动噪声相关, 因此有重要的工程实际意义。

众所周知, Navier^[1]提出线性滑移边界条件假设, 认为滑移速度与壁面处剪切成正比

$$U_s^* = \lambda^* \left. \frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right|_{\text{wall}}, \quad (1)$$

基金项目: 国家自然科学基金(11672204, 91952301, 11732011)、国家重点研发计划(2016YFA0401200)资助项目

其中 λ^* 称为滑移长度。上标*表示有量纲量，无*表示无量纲量。

随着实验技术和设备的发展，超疏水/疏水表面的滑移速度边界条件得到了证实。例如，Choi^[2-3]的团队用实验测出了超疏水和疏水表面的滑移长度。表 1 总结了实验中常见的几种超疏水/疏水表面以及滑移长度^[4-9]。紧接着相关的分子动力学模拟研究也开展起来^[10]。

21 世纪以来的前 10 年，人们通过计算，得到了滑移速度边界条件下槽道流和圆管流动的层流基本流，以及稳定性分析的结果，发现滑移速度对线性不稳定性起到抑制作用^[11]。最近，Picella 等^[12]对槽道流的转换过程进行了直接数值模拟，结果表明超疏水表面延迟了自然转换。

表 1 实验中测得微米级的滑移长度

参考文献	流动类型	超疏水表面	速度剖面中的 最大值/(m/s)	滑移长度/ μm
Watanabe, et al ^[4]	方管流动	添加疏水二氧化硅的氟 烷改性的丙烯酸树脂	0.125 0.190 0.233	582
Watanabe, et al ^[5]	圆管流动	添加疏水二氧化硅的氟 烷改性的丙烯酸树脂	0.186 0.243 0.314	239
Lee et al ^[6]	库塔流动	聚四氟乙烯	≈ 0.052	圆柱型表面结构:93 格栅型表面结构:185
Lee and Kim ^[7]	库塔流动	1H,1H,2H,2H-全氟癸基 三氯硅烷	≈ 0.117	圆柱型表面结构:140 格栅型表面结构:400
Ou, et al ^[8]	微槽道流动	光刻硅片	$\approx 0.02 \sim 0.08$ (此处是平均速 度)	21
Truesdell, et al ^[9]	库塔流动	聚二甲硅氧烷	0.13	250

早在超疏水表面的滑移速度条件得到证实之前，就有人研究滑移速度条件下的平板边界层流动。Martin 和 Boyd^[13]使用打靶法进行数值求解，得到了滑移速度边界条件下的 Blasius 边界层的速度剖面，其结果精度高。但是他们只给出了几个边界条件无量纲参数下的结果。而滑移速度条件下，层流解不再是相似的，即一个平板边界层从前到后每个位置对应的边界条件中的无量纲参数都不同，都需要单独计算，而这样的结果目前尚未见到。Essaghir 等^[14]计算了不同参数下的中性曲线，认为滑移速度对线性不稳定性起抑制作用，但是该计算中有一个重要的参数使用有误，因此其结果缺乏明确的物理意义。

本文用数值计算的方法研究水下超疏水表面平板边界层的自然转换。先针对滑移速度边界条件下的 Blasius 方程，使用迭代法结合打靶法，计算从前缘到下游整个计算域内的层流。再对层流剖面进行线性稳定性分析，此时仍要注意使用滑移边界条件。最后，基于稳定性分析的结果，使用半经验的 e^N 方法预测转换位置。具体的控制方程和数值方法在第 2 部分中进行阐述。在第 3 部分中，分别阐述了滑移长度和来流速度对自然转换位置的影响。

2 控制方程和数值方法

2.1 超疏水表面的层流基本流计算

对二维不可压缩 N-S 方程进行量级分析, 对于定常流动, 考虑压力沿流向不变的情况, 忽略高阶小量, 得到边界层方程。滑移边条为式 (1), 其他边条为 $U_{y=\infty}^* = U_\infty^*, V_{\text{wall}}^* = 0$ 。

在 Watanabe 等^[5]的圆管实验中, 滑移长度为 $239\mu\text{m}$, 且不随来流速度的改变而变化, 所以对边界层流动的滑移长度取为常数。

选取当地到平板前缘距离 x^* 和来流速度 U_∞^* 作为参量进行无量纲化。并引入无量纲变量 $\eta = y^* \sqrt{\frac{U_\infty^*}{\nu^* x^*}}$, 和无量纲函数 $f(\eta) = \frac{\Psi^*(x^*, y^*)}{\sqrt{\nu^* U_\infty^* x^*}}$ 代入到边界层方程和边条中, 则得到 $f(\eta)$ 的常微分方程和边界条件为

$$\begin{cases} f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0, \\ \eta = 0: f(0) = 0, f'(0) = K f''(0), \\ \eta = \infty: f'(\infty) = 1, \end{cases} \quad (2)$$

其中, 无量纲数 K 的定义为 $K = \frac{\lambda^*}{x^*} \sqrt{Re_x}$, Re_x 为雷诺数 $Re_x = \frac{x^* U_\infty^*}{\nu^*}$ 。

对一种超疏水材料, 在一个来流速度下, 在一个流向站位, 即无量纲数 K 为某一常数时, 使用 Martin 和 Boyd^[13]的方法数值求解方程(2)。平板上不同流向位置的无量纲数 K 是不同的, 因此要知道整个平板上的层流, 就要在不同的无量纲数 K 下计算 Blasius 方程。我们在上述 Martin 和 Boyd^[13]打靶法的外面, 再嵌套一层迭代进行计算。

图 1 给出了不同 K 值下的速度剖面 $U(\eta)$, 并与 Martin 和 Boyd^[13]的结果一致。由此可见, 本文中基本流的算法得到验证。

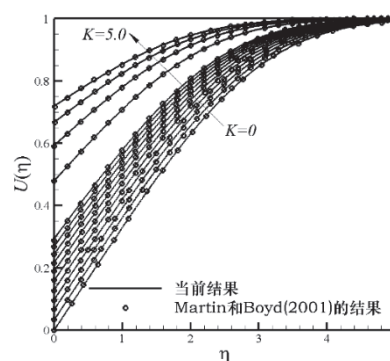


图 1 不同 K 值下的速度剖面 $U(\eta)$

2.2 超疏水表面流动的线性稳定性分析方法

从不可压缩流动的 N-S 方程出发, 将瞬时量写成基本流和扰动量之和, 然后用瞬时量的方程减去基本流的方程并略去二阶以上的小量, 就得到线性化的扰动方程。再使用平行流假设, 将小扰动写成行进波的形式, 将其带入到扰动方程中就可以得到线性稳定性方程。注意小扰动在壁面处也要使用滑移速度边界条件。本文使用周恒和赵耕夫^[15]所用的 Muller 法求解线性稳定性方程, 具体方法可见参考文献[15]。

2.3 预测转捩位置的 e^N 方法

基于线性稳定性理论的 e^N 法目前已经被广泛应用于预测转捩位置的工作中, 它是由

Smith, Gamberoni^[16]和 Van Ingen^[17]提出的。关于 e^N 方法的使用介绍可从文献[15]中找到, 其中 N 值需要实验来给定。保守起见, 我们建议预测水下回转体转捩位置时, 转捩处的 $N_{\max}$ 值取的要小一点, 本文取为 7。

3 结果与讨论

3.1 超疏水表面滑移长度对边界层转捩位置的影响

我们先研究超疏水表面的滑移长度对自然转捩的影响。从表 1 中可以看出, 这些超疏水表面实验的最大速度都在 0.02~0.314 m/s, 我们将边界层外来流速度取为 0.186 m/s, 与 Watanabe 等^[5]圆管实验的一致。

通过 2.1 中的基本流算法, 得到不同滑移长度下层流基本流。为了研究滑移长度对速度剖面的影响, 我们在 4 个位置处比较了 8 种不同滑移长度条件下流向速度 U^* 的剖面, 图 2 给出了在 $x^*=0.8$ m 处的比较结果, 插图为壁面处剖面的局部放大图。可以看出, 相对于无滑移的普通壁面, 超疏水表面使得层流边界层剖面变得更靠近壁面, 表示边界层厚度变得更小。而且对于超疏水表面, 随着滑移长度的增长, 壁面滑移速度会增大。

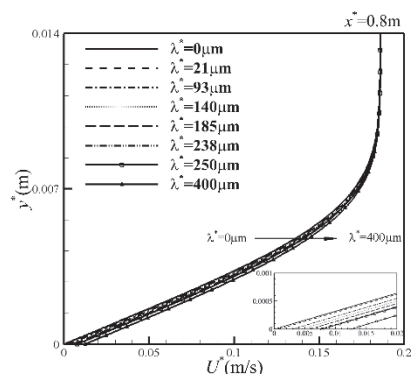


图 2 0.8m 处不同滑移长度的速度剖面

在得到速度剖面后, 通过稳定性分析得到二维中性曲线, 如图 3 所示, 插图为临界失稳位置处的局部放大图。从图 3 可以看出, 随着滑移长度的增加, 不稳定区开始出现的临界流向位置逐渐向下游移动, 且不稳定区逐渐变小。这表明超疏水表面使得层流边界层变得更稳定, 且其“稳定作用”随着滑移长度的增加更变得更强。

为了使用 e^N 方法预测转捩位置, 首先要找到流向当地最不稳定的扰动。以滑移长度为 21 μm 为例进行研究, 我们在 $x^*=1.2$ m、12 m 和 18 m 三个位置处进行了比较。图 4 给出了 1.2 m 处最大增长率 σ^* 随展向波数 β_r^* 的变化。可以看出, 二维扰动 (β_r^* 等于 0) 的增长率总是大于三维扰动的 (β_r^* 不为 0), 其他位置也是一样。这表示流向各处都是二维扰动最不稳定。因此接下来使用 e^N 法预测超疏水表面转捩位置时, 只需考虑二维扰动即可。

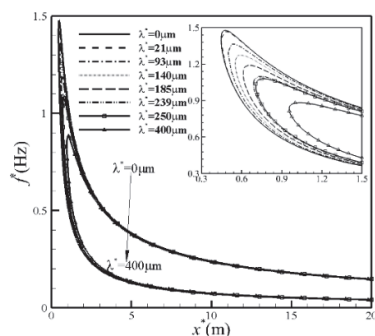


图 3 不同滑移长度下的中性曲线

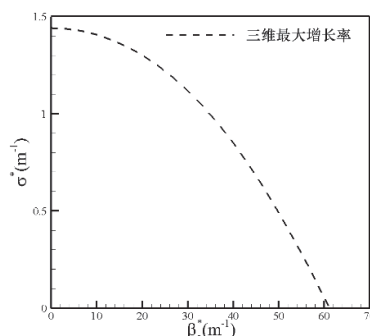


图 4 1.2m 处三维最大增长率

本文取 $N_{\max}=7$ 处为转捩位置,图 5 画出了使用 e^N 法得到的 8 种滑移长度的自然转捩位置 x^* 。可以看出,随着滑移长度的增大,转捩位置一直向下游移动,这表明超疏水材料的表面滑移长度越大,发生转捩的位置越靠下游。我们用超疏水表面的转捩位置减去普通无滑移表面的可以得到转捩延迟距离 Δx^* ,结果如图 6 所示。可以明显看到,随着滑移长度的增大,转捩延迟距离 Δx^* 也越来越大。这表明超疏水材料的表面滑移长度越大,延迟转捩的绝对效果越明显。

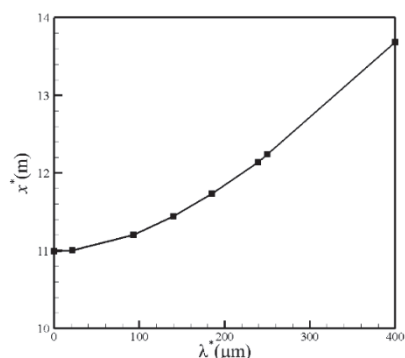
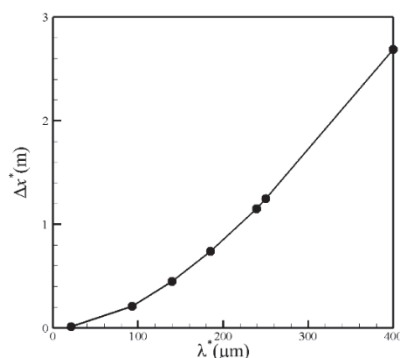


图 5 不同滑移长度下的自然转捩位置

图 6 转捩延迟距离 Δx^* 随滑移长度的变化

3.2 来流速度对超疏水表面边界层转捩位置的影响

这一小节我们研究来流速度对超疏水表面边界层转捩位置的影响,其中滑移长度取 $239\mu\text{m}^{[5]}$,来流速度取了 10 个值 (0.186、0.243、0.314、1、1.9、3、5、7、10 和 15 m/s)。

图 7 给出了不同来流速度下的二维中性曲线,两幅插图为临界失稳位置处的局部放大图,只是频率范围不同。可以看出,来流速度的升高带来两个明显的影响,一是不稳定区所对应的频率升高;二是不稳定区的范围变大。而不稳定区开始出现的临界流向位置随着来流速度的增大,先缓慢向上游移动,然后再缓慢向下游移动,总体上变化并不明显。

本文取 $N_{\max}=7$ 为转捩位置,图 8 画出了使用 e^N 法得到的超疏水表面不同来流速度下的自然转捩位置 x^* ,为了对比,将相应来流速度下普通无滑移表面的结果也画在图中。可以看出,对于普通无滑移表面,随着来流速度的升高,转捩位置一直向上游移动。但是超疏水表面的结果则在变化趋势就有所不同,来流速度很低时,随着来流速度的升高,转捩位置先快速向上游移动;来流速度达到一定值之后,继续升高,转捩位置则转为缓慢向下游移动。这表明,对于超疏水表面边界层,存在一个“最危险”的来流速度,此时转捩位置最靠近前缘,低于或高于这个速度,转捩位置都更靠下游。对于本小节所取的滑移长度为 $239\mu\text{m}$ 的情况,这一“最危险”的速度为 $U_{\infty}^*=1.9\text{m/s}$ 。图 9 画出了超疏水表面造成的相对于普通无滑移表面的转捩延迟距离 Δx^* 。随来流速度的升高,转捩延迟距离变得越来越大。这表明对于同一种超疏水材料,来流速度越高,转捩延迟的绝对效果越明显。

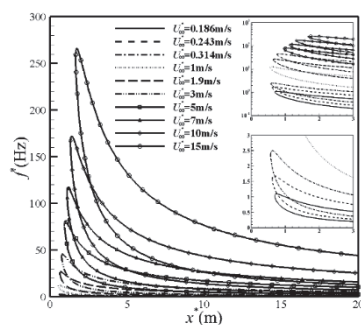


图7 不同来流速度超疏水表面的中性曲线

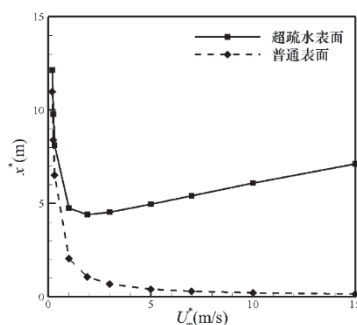


图8 不同来流速度下超疏水表面和普通无滑移表面的自然转换位置

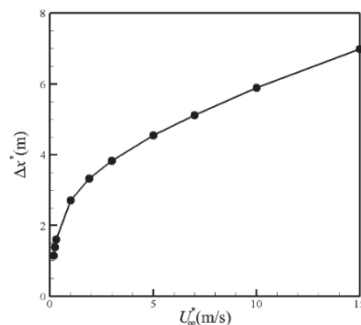


图9 转换延迟距离 Δx^* 随来流速度的变化

4 结论

使用数值计算的方法研究了水下超疏水表面平板边界层的自然转换, 包括层流基本流, 流动的稳定性与自然转换的位置 3 方面的问题, 得到以下结论: ①相对于普通无滑移表面, 超疏水表面使得层流边界层的厚度变得更薄。②在超疏水表面层流边界层中的流向各处, 二维扰动仍是最不稳定的。③随着滑移长度增大, 不稳定区的临界位置向下游移动, 不稳定区变小, 这导致超疏水表面有延迟自然转换的效果。随着滑移长度增大, 超疏水表面平板边界层自然转换的位置也更靠后。此外, 随着滑移长度增大, 超疏水表面相对于普通表面的转换延迟距离也会增大。④随着来流速度升高, 超疏水表面边界层的不稳定区的频率升高; 不稳定范围变大; 开始出现不稳定小扰动的临界位置先向上游移动, 然后再向下游移动, 但总体上变化并不显著。不同于普通无滑移表面, 来流速度越大, 自然转换发生位置更靠前; 超疏水表面上, 随着来流速度的升高, 转换位置先向上游移动, 再向下游移动, 其中存在一个“最危险”的来流速度, 此时转换位置最靠近平板前缘。此外, 随着来流速度升高, 转换延迟距离也会增大。

参考文献

- 1 Navier C L M H. Mémoire sur les lois du mouvement des fluids. Mém l'Acad Roy Sci l'Inst France, 1823, 6: 389-440.
- 2 Choi C H, Westin K J A, Breuer K S. Apparent slip flows in hydrophilic and hydrophobic microchannels. Physics of Fluids, 2003, 15(11): 2897-2902.
- 3 Choi C H, Kim C J. Large slip of aqueous liquid flow over a nanoengineered superhydrophobic surface. Physical Review Letters, 2006, 96(6): 066001.
- 4 Watanabe K, Yanuar, Mizunuma H. Slip of Newtonian Fluids at Slid Boundary. JSME International Journal Series B, 1998, 41(3): 525-529.
- 5 Watanabe K, Yanuar, Udagawa H. Drag reduction of Newtonian fluid in a circular pipe with a highly water-repellent wall. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 381: 225-238.
- 6 Lee C, Choi C H, Kim C J C. Structured surfaces for a giant liquid slip. Physical Review Letters, 2008, 101(6): 87-90.
- 7 Lee C, Kim C J. Maximizing the giant liquid slip on superhydrophobic microstructures by nanostructuring their sidewalls. Langmuir, 2009, 25(21): 12812-12818.

- 8 Ou J, Perot B, Rothstein J P. Laminar drag reduction in microchannels using ultrahydrophobic surfaces. *Physics of Fluids*, 2004, 16(12): 4635-4643.
- 9 Truesdell R, Mammoli A, Vorobieff P, van Swol F, Brinker CJ. Drag reduction on a patterned superhydrophobic surface. *Physical Review Letters*, 2006, 97(4): 044504.
- 10 Barrat J L, Bocquet L. Influence of wetting properties on hydrodynamic boundary conditions at a fluid/solid interface. *Faraday Discuss*, 1998, 112: 119-121.
- 11 Min T, Kim J. Effects of hydrophobic surface on stability and transition. *Physics of Fluids*, 2005, 17(10): 108106.
- 12 Picella F, Robinet J, Cherubini S. Laminar-turbulent transition in channel flow with superhydrophobic surfaces modelled as a partial slip wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 881: 462-497.
- 13 Martin M J, Boyd I D. Blasius boundary layer solution with slip flow conditions, Presented at the 22nd Rarefied Gas Dynamics Symposium, Sydney, Australia, 2001, 585: 518-523.
- 14 Essaghir E, Haddout Y, Oubarra A, Lahjomri J. Non-similar solution of the forced convection of laminar gaseous slip flow over a flat plate with viscous dissipation: linear stability analysis for local similar solution. *Meccanica*, 2016, 51(1): 99-115.
- 15 周恒, 赵耕夫. 流动稳定性. 北京: 国防工业出版社, 2004.
- 16 Smith, A. and Gamberoni, N. Transition, pressure gradient and stability theory. Rept. ES 26388, Douglas Aircraft Company, California, 1956.
- 17 Van Ingen, J. A suggested semi-empirical method for the calculation of boundary layer transition region. Rept. VTH-74, Univ. of Techn., Dept. of Aero. Eng., Delft, 1956.

A Numerical study on the natural transition locations in the flat-plate boundary layers on superhydrophobic surfaces

LIU Bin^{1,2}, ZHANG Yong-ming^{1,2,3,*}

(1. Laboratory for High-speed Aerodynamics, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

3. Tianjin Key Laboratory of Modern Engineering Mechanics. Tianjin 300072, China, Email: ymzh@tju.edu.cn)

Abstract: Previous studies have shown that the flow noise at the head of the underwater vehicle is influenced by the transition location in the boundary layer. In this paper, the natural transition locations in the flat-plate boundary layers on the superhydrophobic surfaces are studied by numerical methods. It is expected to provide theoretical support for finding effective methods to control the flow noise at the head in practical engineering problems. The laminar flow field of the flat-plate boundary layer on the superhydrophobic surface is obtained by solving the Blasius equation with the slip-velocity boundary condition. In the numerical calculation, the iterative method and the shooting method are combined to obtain the solution in the whole domain from the leading edge to downstream. It is found that the boundary layer on the superhydrophobic surface becomes thinner than that on the ordinary surface. The linear instability analysis is carried out to the laminar boundary layer on the superhydrophobic surface, while the slip-velocity boundary condition is still taken into consideration. The semi-empirical e^N method is employed to predict the natural transition location, which is based on the results of linear instability analysis. It is found that the two-dimensional disturbances are still more unstable than the three-dimensional ones on the superhydrophobic surfaces. Both the linear instability and the transition location are significantly affected by the slip length. As the slip length becomes longer, the critical location of flow instability moves further downstream, and the unstable zone becomes

smaller, resulting in the further downstream transition location. This indicates that the superhydrophobic surfaces have the effect of delaying the natural transition. The numerical results show that the transition delay effect becomes stronger as the slip length becomes longer. The influence of the incoming flow velocity on the transition location in the boundary layer on the superhydrophobic surface is also investigated. It is found that the higher incoming flow velocity leads to the higher frequency of the unstable zone and the larger range of the unstable zone. As the incoming flow velocity becomes higher, the critical location of the unstable zone moves once upstream and then downstream, but the change of the critical location is relatively insignificant in general. The movement tendency of the transition location on the superhydrophobic surface against the incoming flow velocity is different from that on the ordinary surface. As the incoming flow velocity level rises, the transition location on the superhydrophobic surface moves once upstream, and then downstream. Consequently, there is a “dangerous” incoming flow velocity corresponding to the transition location which is the closest to the lead edge. With the increase of the incoming flow velocity, the transition delay effect of the superhydrophobic surface becomes stronger.

Key words: Superhydrophobic surface; Flat-plate boundary layer; Flow stability; Natural transition ; e^N method.

波浪极值分析中的不确定性

孙泽^{1,2,3}, 刘小龙^{1,2}, 陈文炜^{1,2}, 蔡志文^{1,2}, 叶永林^{1,2}

(1. 南方海洋科学与工程广东省实验室(湛江), 湛江 524025, Email:sunzedlut@163.com; 2. 中国船舶科学研究中心, 无锡 214082; 3. 湖南大学深海装备研究中心, 长沙 410000)

摘要: N 年一遇极值有义波高的推算对于海洋工程结构物的设计至关重要。本文通过 3 种不同的波浪极值分析方法, 对南海某岛礁潟湖内外两个浮标位置处的后报有义波高数据进行分析, 评估了极值分析中的不确定性, 并给出相应的推荐。

关键词: 有义波高; 极值; 南海

1 引言

作为 21 世纪的海上丝绸之路的重要枢纽^[1], 西沙群岛在南海的海上运输中扮演者重要的角色。西沙的典型地貌特征是岛礁潟湖, 由于岛礁的屏障效应, 波浪能在从外海进入潟湖的过程中产生大量耗散, 这为南海台风期间的海上渔业和工程作业提供了理想的庇护所。对于该区域海上浮动结构物的设计, 对极端波浪环境的结构响应是最重要的标准之一。

通常, 海况的强度大小由有义波高 (H_s) 来表示。本质上, 极端海况的有义波高可通过基于历史波动数据, 建立一个概率分布来计算得到。从极端值分析理论到等效风暴模型, 学者们已经开发了几种理论并用于极端波浪预测。经典的极值分析理论最初的由 Coles^[2]提出, Weibull 分布和 Gumbel 分布都是极值分布的一种表达形式, 这种通用的表达形式被称为广义极值分布 (GEV)。广义帕累托分布 (GPD) 则是另一个分布族, 特别适用于对超额峰值 (POT) 的分析。许多研究人员已经将该理论用于有义波高的返回值估计^[3-6]。最近关于海洋统计极值理论的综述, 请见文献[7]。

另一种分析方法最早由 Borgman^[8]提出, 他研究了风暴过程中海浪的统计特性, 通过积分形式确定了风暴中最大波高度的累积分布函数。基于风暴期间的极值概念, 此结果对于极端波浪的长期分析非常重要。在给定的位置 (即长期统计数据), 使用一些简化的几何形式来模拟风暴中海洋状态的时间演变, 例如三角风暴模型^[9-10], 功率风暴模型^[11-12]和指数风暴模型^[13]。拟合等效风暴的参数, 以使等效风暴中最大波高的分布尽可能与实测风暴相匹配, 从而得到 N 年一遇的等效风暴种极端波高的大小。

在极端值分析的过程中, 有许多因素可能会导致误差和不确定性。本文对不同成分的

作用进行了探索,包括数据采样方法,模型选择和估计方法的选择。研究的对象为南海某岛礁泻湖内外 2 个浮标测点位置的后报波浪数据。使用的模型包括 GEV 和 GPD 分布和 ETS 模型,参数估计的估计的方法基于最大似然 (MLE) 和马尔可夫链蒙特卡洛 (MCMC) 方法。

2 极端波浪的统计模型

本节简要介绍了应用的统计分析模型。正如 Coles^[17]所概述的那样,极值分析是根据经验样本的记录来估计变量极值的概率分布。为了获得对极端值的有效估计,数据应均匀分布且随机独立的。满足要求的一种方法是使用所谓的块最大值方法。在这种方法中,考虑的是某一段时间内的样本最大值,而不是所有数据。该期间可能是一周,一个月或一年(年极大值),具体取决于总数据的长度。在这种情况下,可以证明这些最大值将遵循广义极值 (GEV) 分布。定义 x 为独立的数据集的最大值样本,GEV 不超过概率的表达式为:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] \right\} \quad (1)$$

其中位置 μ , 尺度 σ 和形状 ξ 参数定义了分布的中心,与位置参数和上尾衰变,偏差的大小。根据形状参数 ξ 的值,GEV 具有三种形式。 $\xi = 0$ 时为 1 型或 Gumbel 分布, $\xi > 0$ 时为 2 型或 Fréchet 分布, $\xi < 0$ 时为 3 型或 Weibull 分布。

极值分析的结果通常用收益值或收益水平来表示,它们仅与分布的分位数有关。返回值始终与返回周期相关联,以观察周期的长度或随机变量的(独立)观察次数表示。假设我们感兴趣估算与周期 $R = 1/p$ (在海洋结构设计中通常为 20,50,100 年)相对应的返回值。形式上,我们将此返回值 x_R 定义为每年以概率 p 超过的值。非正式地,这也接近 R 年回报期的最可能最大值。如果年度最大值是具有参数 ξ , σ 和 μ 的 GEV 分布,则回归周期定义为

$$1 - \frac{1}{R} = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] \right\} \text{ when } \xi \neq 0 \quad (2)$$

由此得到

$$x_R = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left(1 - \left(-\log \left(1 - \frac{1}{R} \right) \right)^{-\xi} \right) \text{ when } \xi \neq 0 \quad (3)$$

块极大值 GEV 方法的主要缺点在于,它没有考虑数据集中风暴特征密切相关的大量观测值。这些遗漏会极大地改变极值分析的最终结果,尤其是在对非常有限的数据集进行 GEV 分布拟合的情况下。阈值峰值分析 (POT) 方法是解决块极大值方法的数据可用性限制的一种折衷方法。超阈值峰值分析 (POT) 是一种系统的方法,可以分析超出平均范围的

高水平分布，以便估算超出阈值范围的极端分位数。根据文献[14]，如果阈值足够高，该样本数据将遵循广义帕累托分布。GPD 分布的定义为：

$$F(x) = 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{x - h_{thr}}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \quad \text{when } \xi \neq 0 \quad (4)$$

其中 h_{thr} 是选定的阈值， σ 和 ξ 是 GPD 的比例和形状参数。

当采用 POT 方法时，必须选择合适的阈值来选出峰值。极低的阈值会违反统计模型的渐近原则，另一方面，极高的阈值会导致信息丢失，所选择样本的大小和方差很高。阈值选择的常见做法是基于经验平均剩余寿命图，可以通过计算给定阈值范围内超出阈值的平均超出量轻松获得。具体地，如果 GPD 假设是正确的，则可以识别平均过量近似为线性的阈值范围。在该区域中，GPD 具有几乎恒定的形状参数和线性比例参数值。

GPD 的回归周期的计算类似于 GEV 模型。假设具有参数 u ， σ 和 ξ 的 GPD 模型适用于 X 的阈值超出，则 $R = 1/p$ ，

$$1 - \frac{1}{R} = \exp \left(-\lambda \left(1 + \xi \frac{x_R - h_{thr}}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right) \quad \text{when } \xi \neq 0 \quad (5)$$

其中 λ 是 h_{thr} 以上的超阈次数与年数的比值，年回归值 x_R 定义为

$$x_R = u + \frac{\sigma}{\xi} \left[(R\lambda)^\xi - 1 \right] \quad \text{when } \xi \neq 0 \quad (6)$$

每年的超阈值数 λ 可以简单地通过将超阈值总数与总年数进行比值来计算。

ETS 方法则依赖于“海上风暴”的关键概念。根据 Boccotti 的定义，一次海上风暴是由一系列的时间序列的海况组成，在此期间有义波高的高度应该高于给定阈值，并且风暴之间的时间间隔大于 12 小时。通常情况下，假设阈值与平均有义波高关系为 $h_{thres} = 1.5 < H_s >$ 。同理，阈值越大，实际考虑的风暴的数量 N 越小。ETS 的关键概念是，每个实际发生风暴可经由 ETS 来表示，通过定义三角形的高度（风暴强度）以及三角形的底 b （代表风暴持续时间）。三角形的高度 a 假定等于最大有义波高，它可以直接从有义波高的时间序列数据中确定，而风暴持续持续时间 b 则通过迭代过程执行的最大期望波高度之间的平等来计算 ETS 的实际风暴 [8,15]。为此，可通过数据和 ETS 模型直接使用 Borgman 分布。

实际风暴的最大期望波高 $\bar{H}_{max}$ 的由公式确定

$$\bar{H}_{max} = \int_0^\infty 1 - \exp \left\{ \int_0^b \frac{\rho \ln [1 - P(H; H_s = h(t))]}{\bar{T}[h(t)]} dt \right\} dH \quad (7)$$

其中, D 是在风暴持续时间, $P(H; H_s = h(t))$ 的概率是一个有义波高为 H_s 的海况下具有波高比 H 大的概率, $\bar{T}[h(t)]$ 是平均零上跨零波周期。通过公式计算高度为 a 且底数为 b 的 ETS 的最大预期波高为

$$\bar{H}_{\max} = \int_0^{\infty} 1 - \exp \left\{ \frac{b}{a} \int_0^a \frac{\ln[1 - P(H; H_s = h)]}{\bar{T}(h)} dh \right\} dH \quad (8)$$

实际和等效的三角风暴在统计上是等效的。这意味着峰值大于固定阈值 h 的风暴的返回周期 $R(H_s > h)$ 在实际和等效三角海中相同。考虑到该特征, 可以参考等效三角海来开发该返回期的解析解。 $R(H_s > h)$ 的解析解由 Boccotti^[8] 导出。

$$R(H_s > h) = \frac{\bar{b}(h)}{1 + hp(H_s = h) - P_{H_s}(h)} \quad (9)$$

其中, $\bar{b}(h)$ 为底部条件分布, 可以通过对经验数据指数回归拟合得到

$$\bar{b}(h) = k_1 \exp(k_2 h) \quad (10)$$

其中 k_1 和 k_2 分别是位置的特征参数。

$P_{H_s}(h)$ 代表有义波高的累积分布, 根据文献[10], 采用三参数威布尔分布拟合数据:

$$P_{H_s}(h) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{h - h_l}{w} \right)^u \right] \quad (11)$$

其中 u , w 和 h_l 代表位置的特征参数。

ETS 计算 $H(R)$ 的流程图类似于 POT-GPD 方法, 它需要先设置阈值 h_{thres} 并直接从数据中识别实际风暴。然后, 计算与每个实际风暴相关的 ETS, 并确定拟合出的函数的参数。

3 波浪后报数据

本研究的典型岛礁属于西沙群群岛东北部的某潟湖, 这个典型的潟湖被岛屿和礁石所包围, 形成一处半封闭海域。潟湖内的平均水深约为 35m, 而潟湖外的水深突然变化到数百米。我们的观测系统由两个分别标为 Buoy1 和 Buoy2 的 Datawell 波浪骑士设备组成。Buoy1

停泊在泻湖内，相对浅水深度为 25 m，而 Buoy2 在潟湖外，深度为 100 m。测量设备的概述及测量周期等信息在表 1 中给出。

表 1 测量系统信息

序号	位置	仪器	水深 m	测量周期	采样信息	海况数
Buoy1	潟湖内	Datawell	25	2014 年 6 月 1	每小时 2 Hz 的	16815
		Waverider		日到 2018 年 6 月 18 日	2048 个采样	
Buoy2	潟湖外	Datawell	100	2014/6/1 至	每小时 2 Hz 的	2371
		Waverider		2014/9/27	2048 个采样	

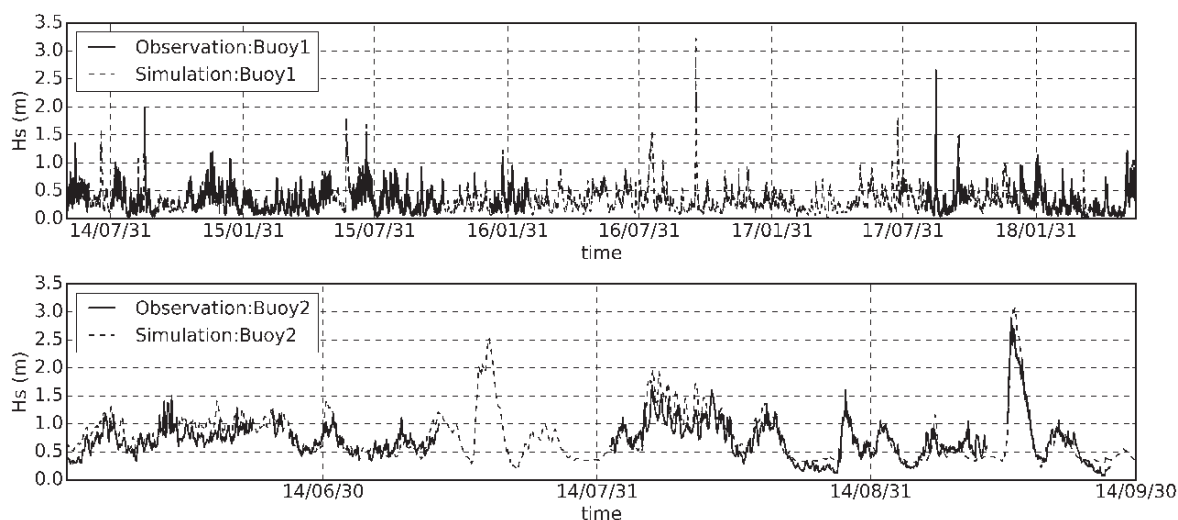


图 1 WW3 计算有义波高与实测有义波高时间序列对比

选用 WAVEWATCH III 模型 (WW3)^[16]来模拟 2014 年至 2018 年的风浪场。关于 WW3 模型的描述可以参考其用户手册。本文构建了非结构的三角形网格，以计算出潟湖内外细部地形变化下的波浪传播，具体的模型验证见文献。

模型运行周期内，测量有义波高与后报有义波高的对比如图 1 所示，蓝色虚线代表模型结果，黑色实线代表观测结果，可以看出后报数据与实测值十分吻合，其相关系数分别达到了 0.86 和 0.89。

4 极值分析结果与不确定性分析

首先给出 GEV 模型的结果，为了比较采样块的大小的影响，我们分别对周极大值数据和月极大值数据进行 GEV 分析。图 2 给出了不同回归周期的极端有义波高结果，其中散点

代表块极大值样本数据，实线为周极大值采样，虚线为月极大值采样，不同颜色代表不同的参数估计方法。参数估计的影响通过使用极大似然估计（MLE）和贝叶斯蒙特卡洛估计（MCMC）方法分别进行。如图所示，在 Buoy1 位置，取样块极大值从一周增加到一个月会使得回归水平整体向上偏移，而在 Buoy2，取样块极大值从一周增加到一个月则使得回归水平整体向下偏移，这表明块的大小对极值分析的结果不是线性增大的，而与浮标位置的有义波高特征有关。两种参数估计方法对比可以看出，MCMC 方法比 MLE 方法计算出的参数更加贴近经验数据。

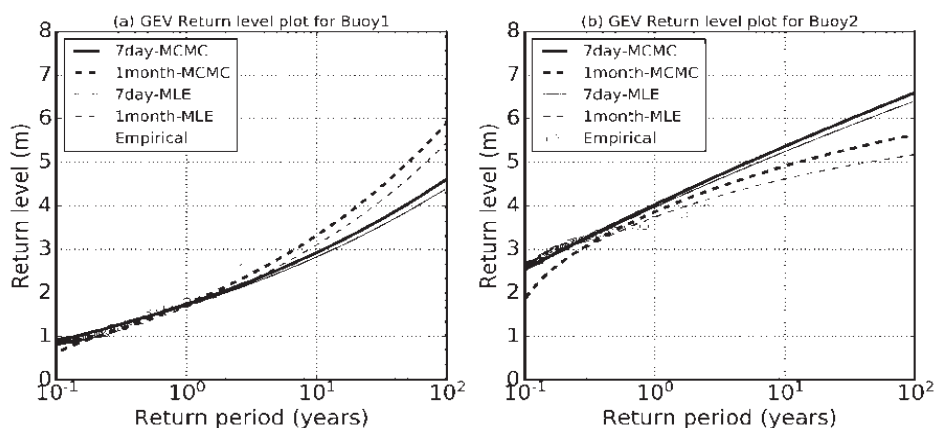


图2 不同块极大值取样的 GEV 方法结果

如前所述，POT-GPD 方法计算的关键在于阈值的选取。合理的阈值是既确保模型的渐近近似又能保证极值数据的有效性。根据 Coles^[17]的方法，本文使用平均剩余寿命趋势图来选择合适的阈值。准确地说，应当选择阈值作为平均剩余寿命图中趋势从近似线性变化到不稳定的接近点。平均剩余寿命图如图 3 所示，蓝色虚线代表选取的阈值水平，在 Buoy1 位置为 0.84m，在 Buoy2 位置为 3.1m。对于更大的阈值，平均剩余寿命图显示平均过量以及 GPD 的相应参数变得不稳定。一旦选择了阈值，下一步便是确定 GPD 分布的相应形状和位置参数，然后通过方程（6）计算出回归值。

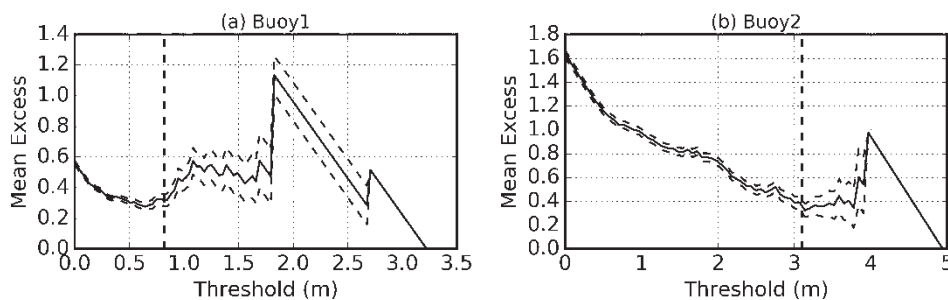


图3 平均剩余寿命

图 4 给出了 POT-GPD 的计算结果, 左侧为 Buoy1, 右侧为 Buoy2。可以看出在 Buoy1 位置, 样本数据与 GPD 分布的拟合效果不好, 而在 Buoy2 位置拟合较好, 整体上 MCMC 的计算结果比 MLE 更佳。

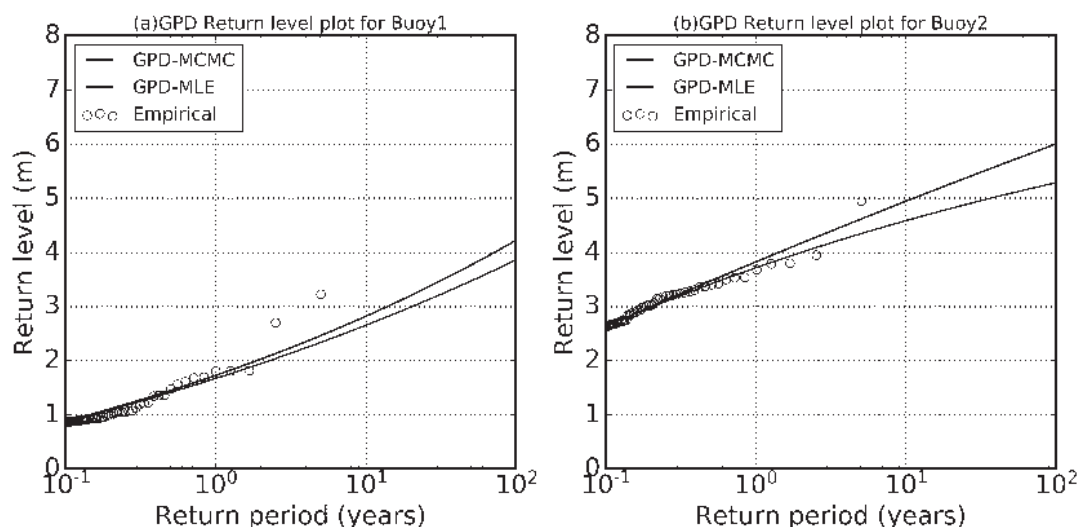


图 4 POT-GPD 计算结果

通过 ETS 模型计算回归水平的流程与上述两种方法不大相同。如第 2 节所述, ETS 模型中的风暴阈值用于从 H_s 的时间序列中选择海风暴。一旦确定了实际的风暴序列, 便确定了相关 ETS 的序列, 并将其用于计算三角形底和高的回归函数。关于风暴阈值, 它取决于给定位置的波浪特性, 通常认为它与 H_s 的平均值成比例。Boccotti^[15]提出的风暴阈值等于 H_s 的 1.5 倍。可以假定该阈值的较高值或较低值, 例如 1.0 倍或 2.0 倍 H_s 。

为了研究阈值对 ETS 结果的影响, 本文中使用 $1.0 < H_s >$ 、 $1.5 < H_s >$ 和 $2.0 < H_s >$ 作为阈值。通常, 提高风暴阈值将导致风暴数量的减少和实际风暴持续时间的减少。因此, 会得到不同的回归函数 $R(H_s > h)$ 。此外, 在等式 11 中, 由形状函数和累积概率函数确定。改变阈值不仅影响 $\bar{b}(h)$ 而且影响 $P_{H_s}(h)$ 。

阈值对 $\bar{b}(h)$ 的拟合结果影响如图 5 所示, 不同阈值对应的经验数据用不同的符号表示 (星号、三角形、圆点), 不同阈值对应的拟合结果用不同线形表示 (实线, 虚线和点画线)。不难发现, 阈值对 $\bar{b}(h)$ 的影响非常小, 3 种不同的线形几乎重叠。为了进一步探讨其对回归周期函数 $R(H_s > h)$ 的影响, 图 6 给出了相同 $\bar{b}(h)$ 下, 使用不同阈值确定的 $P_{H_s}(h)$ 计算得到的回归周期 $R(H_s > h)$, 可以看出, 当阈值增大到一定程度时 (大于 $1.5 < H_s >$), $P_{H_s}(h)$ 的分布发生改变, 从而影响 $R(H_s > h)$ 的水平, 即 ETS 模型中阈值的增加会通过 $P_{H_s}(h)$ 影响回报水平的斜率, 而非 $\bar{b}(h)$ 。

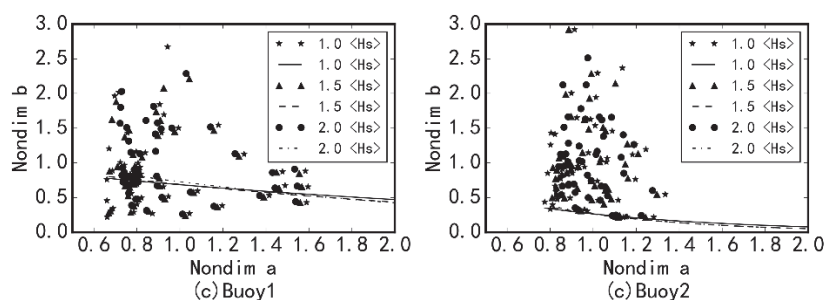


图5 不同阈值下三角风暴的底和高的拟合关系

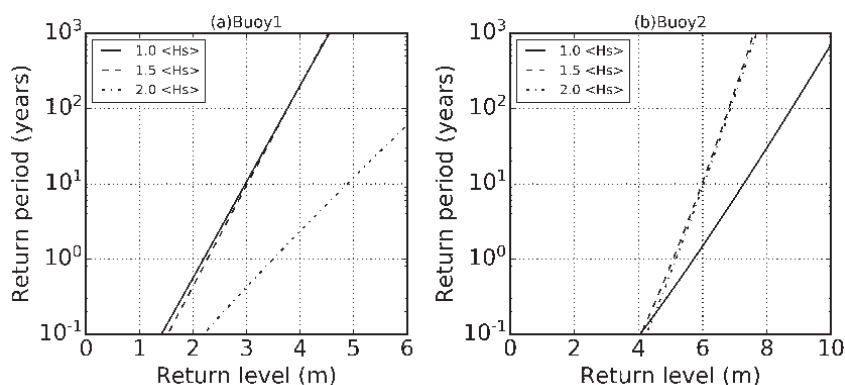


图6 不同阈值对回归周期的影响

5 结论

本文描述了使用3种极值波浪分析方法表征典型礁泻湖中的极端波高特性。通过建立非结构化的WW3波浪模型，计算了2014年至2018年的5年后预报数据，后预报数据已通过在泻湖内外部署的两个波浪骑士浮标的观测波浪数据得到了很好的验证。3种极端波分析3种不同的统计模型，包括GEV模型，POT-GPD模型和更加复杂的ETS模型。本文对3种模型使用过程中的不确定性进行分析和总结，得出的主要结论如下：

(1) GEV分布可以很好拟合块极大值中的观测样本，然而，块的大小需要与当地的样本数据结合决定。对于小样本数据，参数估计至关重要。在高分位，使用MCMC方法的拟合效果更好。

(2) POT-GPD方法和ETS方法均有一个重要的步骤，即阈值的选取。GPD方法的阈值选取可以使用平均剩余寿命图来确定，但这是一种相对主观的方法。阈值的选取直接影

响了拟合效果的好坏,在本文中 Buoy1 位置的数据显然不能满足 GPD 分布。同样的,MCMC 方法对 GPD 的参数估计结果比 MLE 方法更好。

(3) 在 ETS 模型中,阈值的选取影响着统计的风暴的结构。阈值对 $\bar{b}(h)$ 的影响相对较小,在 Buoy1 和 Buoy2 位置,阈值主要通过改变 $P_{hs}(h)$ 而对回归水平的斜率造成影响。

(4) 数值结果表明,POT 和 ETS 都依赖于阈值,但是它们的灵敏度却大不相同。POT 对阈值具有更高的敏感性,不同阈值对回归周期的影响很大。而 ETS 的三角形结构则相对稳定。

致谢

本研究由湛江湾实验室项目 ZJW-2019-08,工信部[2016]22 和[2019]357,江苏省青年基金项目 (No. 351510008K0708LA00) 项目资质完成。

参考文献

- 1 Zheng, C., Xiao, Z., Zhou, W., et al. 21st century maritime silk road: a peaceful way forward. Springer,2018.
- 2 Boccotti, P. Wave mechanics for ocean engineering. Elsevier, 2000.
- 3 Mathiesen, M., Goda, Y., Hawkes, P.J., et al. Recommended practice for extreme wave analysis. Journal of hydraulic Research ,1994:32 (6), 803-814.
- 4 Mazas, F., Hamm, L. A multi-distribution approach to POT methods for determining extreme wave heights. Coastal Engineering, 2011:58 (5), 385-394.
- 5 Menéndez, M., Méndez, F.J., Losada, I.J., et al. Variability of extreme wave heights in the northeast Pacific Ocean based on buoy measurements. Geophysical Research Letters, 2008: 35 (22).
- 6 Sartini, L., Mentaschi, L., Besio, G. Comparing different extreme wave analysis models for wave climate assessment along the Italian coast. Coastal Engineering, 2015:100, 37-47.
- 7 Jonathan, P., Ewans, K. Statistical modelling of extreme ocean environments for marine design: A review. Ocean Engineering, 2013:62, 91-109.
- 8 Boccotti, P. Wave Mechanics and Wave Loads on Marine Structures, 2014.
- 9 Arena, F., Pavone, D., 2009. A generalized approach for long-term modelling of extreme crest-to-trough wave heights. Ocean Modelling 26 (3-4), 217-225.
- 10 Laface, V., Arena, F. A new equivalent exponential storm model for long-term statistics of ocean waves. Coastal Engineering, 2016:116, 133-151.
- 11 Arena, F., Malara, G., Romolo, A. On long-term statistics of high waves via the equivalent power storm model. Probabilistic Engineering Mechanics, 2014: 38, 103-110.
- 12 Fedele, F., Arena, F. Long-Term Statistics and Extreme Waves of Sea Storms. Journal of Physical Oceanography, 2010: 40 (5), 1106-1117.
- 13 Laface, V., Malara, G., Romolo, A., et al. Peak over threshold vis-à-vis equivalent triangular storm: Return

- value sensitivity to storm threshold. Coastal Engineering, 2016:116, 220-235.
- 14 Pickands, J. Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. Annals of Statistics, 1975:3 (1), 119-131.
- 15 Boccotti, P. Wave Mechanics and Wave Loads on Marine Structures, 2014.
- 16 WAVEWATCH III Development Group, User Manual and System Documentation of WAVEWATCH-III version 5.16. Noaa,2016.
- 17 Coles, S., Bawa, J., Trenner, L. et al. An introduction to statistical modeling of extreme values. Springer, 2001.

Uncertainties in extreme wave analysis

SUN Ze^{1,2,3}, LIU Xiao-long^{1,2}, CHEN Wen-wei^{1,2}, CAI Zhi-wen^{1,2}, YE Yong-lin^{1,2}

(1 Fisheries Big Data Center of South China Sea, Zhanjiang, 524000, China; 2 China Ship Scientific Research Center, No.222 East Shanshui Road, Binhu District, Wuxi, 214082, China; 3 Centre for Marine Technology, Hunan University, No.1 Lushan Road, Yuelu District, Changsha, 410082, China
Email:sunzedlut@163.com)

Abstract: The calculation of extreme wave height in N years is very important for the design of offshore engineering structures. This paper analyzes the post-reported meaningful wave height data at two buoy positions inside and outside an island reef lagoon in the South China Sea through three different wave extreme value analysis methods, evaluates the uncertainty in the extreme value analysis, and gives the corresponding recommend.

Key words: Wave height, Extreme value, South China Sea.

基于能量观点的双泡相互作用研究

卞真东¹, 杜特专²

(1. 中国科学院力学研究所, 北京, 100080, Email: zhend_b@qq.com)

(2. 中国科学院 力学研究所, 北京, 100080, Email: dutezhuan@imech.ac.cn, 通信作者)

摘要: 利用 OpenFOAM 开源软件探究无限水域中单泡模型和双泡模型在运动过程中的能量变化。首先, 利用可压缩 Keller-Herring 气泡动力学方程来验证 CFD 计算模型, 结果表明 CFD 模拟得到的半径、压强以及温度等参数变化与理论解以及相应的参考文献吻合良好。其次, 证实了动能和能量模型中总功的结果基本一致, 气泡势能与气泡内压做功趋势保持一致。在单气泡能量分析的基础上, 研究更一般条件下双泡脉动过程的能量传递。分析气泡间距 D 、 A 泡内压 P_A 和 B 泡初始半径 R_B 对双气泡相互作用的影响, 给出了双泡相互作用过程中的能量传递, 包括体积、做功的变化。得到了 D , P_A , R_B 这 3 个参数对能量传递的影响规律: D 越大动能传递率和势能传递率都越小; P_A 越大动能传递率越大而势能传递率越小; 随着 R_B 变大, 势能传递率持续增大而动能传递率先增大后减小。

关键词: OpenFOAM; 功能关系; 气泡动力学; 双泡

1 引言

空化会对水下高速航行器和高速推进器造成结构破坏以及噪声等问题, 极有可能影响设备的正常使用。另一方面合理利用空化现象可以在例如超声碎石^[1]、鱼雷减阻^[2]、表面清洗^[3]等领域发挥重要作用。空化的本质是微小气泡群, 因而对气泡群脉动特性和溃灭机理进行研究, 掌握气泡群溃灭的围观机制及宏观效应, 才能更好的抑制或者利用空化效应。王诗平等^[4]从波动方程出发, 建立可压缩性非球形气泡模型, 发现可压缩性模型中气泡射流较小, 随后通过电火花产生两个气泡^[5], 发现气泡存在融合、对射流以及相反射流等现象; 张阿漫等^[6]通过 FFTM 和 HOBEM 方法探讨影响气泡群膨胀、坍塌、迁移以及射流形成的影响因素。在多气泡动力学的研究过程中发现初始半径、泡-泡间距以及泡内压力等参数至关重要, 张凌新等^[7]发现气泡群总体上存在溃灭时间的延迟以及后期加速等现象, 增加气泡数或减小气泡间距会促进该现象; 王德鑫等^[8]从双泡间的压力波出发, 分析气泡初始半径、泡-泡间距等参数对双泡相互作用的影响, 发现气泡的初始半径对泡内温度以及气泡膨胀影响很大, Bjerknes 力对气泡间距变化非常敏感; 清河美等^[9]通过三泡、五泡结构研究中

心小气泡动力学特征,发现随着周围大气泡的半径增大,中间小气泡会发生延迟膨胀甚至出现被完全抑制膨胀的现象; E. Lauer 等^[10]通过研究水平空泡阵列的溃灭,发现通常较小的气泡间距会产生更大的溃灭压力。目前很多学者从能量的角度对气泡进行研究, S Merouani 等^[11]研究超声辐射下的单气泡在不同超声频率、振动频率和超声强度等参数对声化学和声致发光的影响。YT Didenko 等^[12]从微观角度量化气泡溃灭过程中的气体能量耗散以及分析来源; Tiwari 等^[13]把气泡外 2 倍大小领域内的流体动能作为气泡的动能,研究近壁面接近 50 个气泡的发展与溃灭,发现在气泡群溃灭过程中总是最外层气泡先发生溃灭,层次递进,最终在中心产生最大的冲击压力。该方法能够精细的模拟气泡群溃灭过程压力脉冲的形成,但由于对每个气泡都进行直接模拟,因此需要消耗大量的计算资源。目前大多数学者的关注重点是多泡间的相互作用,对气泡能量的研究也基本注重于泡内气体而很少涉及功能关系在气泡群相互作用中所起到的作用。

针对气泡群溃灭压力产生机理,从功能关系出发建立气泡能量模型,用于能量传递模型并计算双泡运动过程中的能量传递以及分析能量变化与双泡运动的关系,目的是形成气泡群能量模型并计算不同工况下多泡溃灭脉冲以及用能量来分析气泡群的运动。

2 气泡能量模型

将气泡和周围的水体看成是一个整体,气泡系统的能量为气泡势能以及远场势能两部份,水体系统的能量为动能。假设气泡运动过程保持球型,且忽略液体的可压缩性。

2.1 水体动能与对水体做功的关系

如图1所示,设气泡半径为 R , 取距气泡中心 r ($r \rightarrow \infty$) 做球面边界,气泡和球面边界内的流体形成控制体 Σ 。设经过时间 dt , 气泡半径变化为 dR , r 处变化为 dr 。通过两个控制面的流量是相等的,得到公式(1):

$$4\pi R^2 \cdot dR = 4\pi r^2 \cdot dr \quad (1)$$

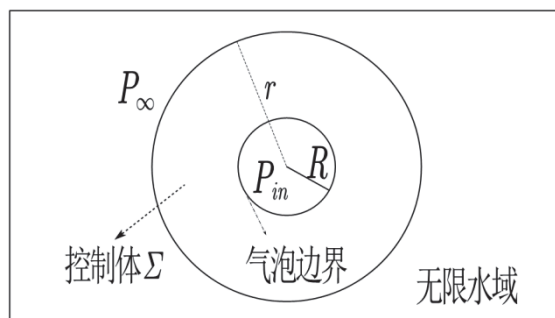


图 1 系统对水域做功示意图

记 P_∞ , P_{in} 和 V 分别为无穷远压力、泡内压力和气泡体积, 在 dt 内系统对水域做的总功为:

$$dW = 4\pi R^2 \cdot P_{in} \cdot dR - 4\pi r^2 \cdot P_\infty \cdot dr = (P_{in} - P_\infty) dV \quad (2)$$

式(2)表明, 系统对水体做功只需考虑气泡内压、无穷远压力和气泡半径这3个参数, 对于水体来说, 只有动能发生变化, 因此气泡对水体做功转化为水体动能。

2.2 气泡系统与气泡做功的关系

气泡系统与受外力驱动下而发生运动的弹簧系统十分类似, 远场势能类比外力做功而气泡势能可以类比弹簧势能。气泡膨胀, 气泡对水体做功, 泡内温度降低, 气泡的内能减少; 反之增加。根据热力学均分理论和理想气体方程并考虑气泡边界绝热, 得到气泡内能 E_T 的计算公式为:

$$E_T = \frac{i}{2} \times nRT = \frac{i}{2} \cdot P_{in} V \quad (3)$$

i, n, R, T 分别表示泡内气体的自由度、物质的量、理想气体常数以及温度。定义气泡势能为任意时刻气泡内能与初始时刻气泡内能的差值(初始时刻是最大势能点, 其值为 0), 即:

$$E_{gas} = \frac{i}{2} \cdot (P_{in} V - P_{in,0} V_0) \quad (4)$$

由于气泡只和水体有能量交换, 因此气泡做功只考虑气泡对水体做功, 即:

$$dW_b = P_{in} dV = 4\pi R^2 P_{in} dR \quad (5)$$

两者满足 $dE_{gas} = dW_b$ 。从绝热系统出发仍然得到相同结论, 其公式推导如下

$$P_{in} V^\gamma = P_{in,0} V_0^\gamma = \text{const} \quad (6)$$

结合式(5)和式(6)并对 dW_b 进行积分, 有:

$$\int_{V_0}^V dW_b = \int_{V_0}^V P_{in} dV = P_{in,0} V_0^\gamma \int_{V_0}^V \frac{1}{V^\gamma} dV = \frac{1}{1-\gamma} (P_{in} V - P_{in,0} V_0) \quad (7)$$

式(7)中 γ 表示多方指数, 绝热系统为 1.4, 空气中 i 取 5, 可以发现两种推导结果一致。

3 数值模拟及模型验证

采用OpenFOAM的compressibleInterFoam模块进行建模, 建模过程中的参数见表1。本文CFD模型见图2, 通过用2度楔形体模拟轴对称模型并设置outlet的速度边界为pressureInletOutletVelocity, 温度、压力和相边界条件为fixedValue, 并对压力进行消波处理, 模型在气泡附近进行网格加密, 从而用较少的网格达到较好的模拟结果。

表 1 单泡模型建模参数

参数	无穷远 压强	无穷远 温度	静水 密度	黏度	声速	表面 张力	泡内 压强	泡内 温度	气泡初 始半径
单位	MPa	K	kg/m ³	$\times 10^{-4}$	m/s	N/m	MPa	K	$\times 10^{-4}$ m
数值	0.1	300	1027	3.65	1500	0.07	60	300	6.0

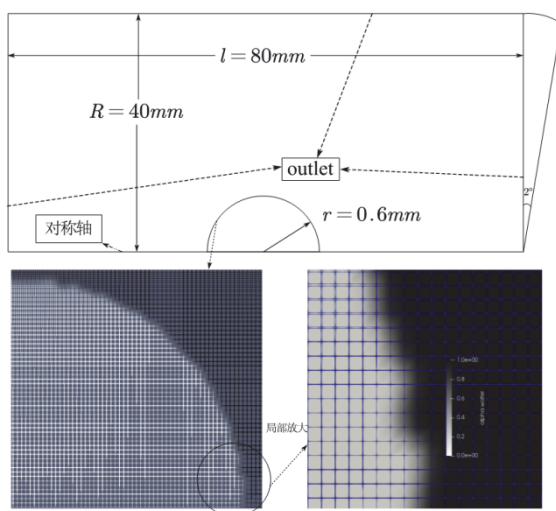


图 2 CFD 模型

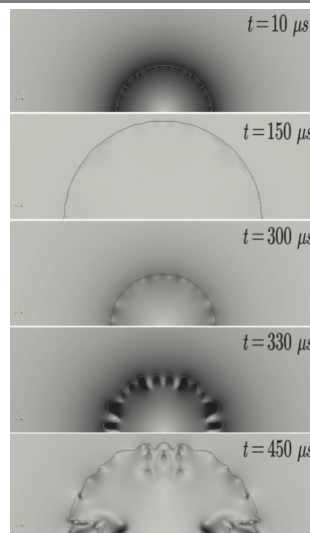


图 3 气泡脉动及失稳过程

经过计算得到气泡流场如图3所示，图中轮廓线为气泡边界，图像的灰度值越大则表示速度越大，气泡在内压驱动下经历膨胀、收缩、失稳膨胀以及失稳收缩4个阶段，失稳的原因是由于气泡收缩到最小半径时内部网格不足，导致膨胀时无法维持球形气泡。

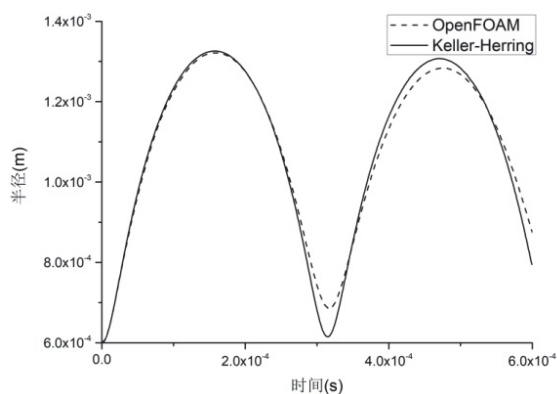


图 4 可压缩 Keller-Herring 理论半径对比 OpenFOAM 计算半径

对比可压缩Keller-Herring理论半径(式8)和OpenFOA计算半径(图4),发现在第一周期两者基本一致。

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} (P_L - P_m - P_\infty) \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \quad (8)$$

式(8)中, $\dot{R}$, c , ρ , P_L 分别表示气泡边界速度、声速、密度以及蒸汽压强(本文设为0)。

随后将CFD数据带入能量模型求得总功,将其与动能进行对比得图5,发现在第一周期两者基本一致。

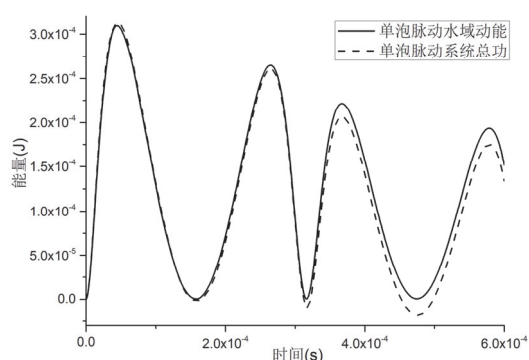


图5 单泡系统做功与水域动能关系

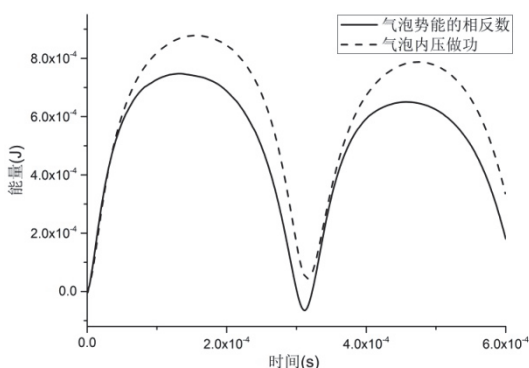


图6 气泡内压做功对比气泡势能

在假设泡内气体自由度为5的情况下,为方便比较气泡势能和内压做功,对气泡势能取相反数得图6,发现在数值上两者存在误差,但变化趋势一致,产生误差的主要原因可能是因为CFD计算中气泡内气体与液态水存在能量交换,与理论推导中的绝热假设有所差别。这与气泡势能的系数 i 紧密相关,定量上精度的提高还需要对气泡脉动过程中通过气泡界面传递的能量进行深入分析,我们将在未来的工作进一步开展。

4 双泡相互作用

本节主要内容有两部分:一部分是研究双泡运动过程中的能量传递;另一部分是能量变化与气泡间运动的关系。设能量由A泡传到B泡,从相互作用的角度看,能量传递应表现为B泡表面由A泡产生的压力 $P_{A \rightarrow B}$ 对B做功,通过单泡能量模型可以直接求得系统的功能变化,本节仿真的关键是B泡的内压与外压相等,因而B泡状态的变化反应能量的传递。

4.1 双泡模型

设计如图7所示的双泡模型，A泡表示脉动气泡，B表示观测气泡(内压与外压相等)，D是两个气泡中心的距离。本实验主要目的是得到从A泡传递到B泡的能量，定义B泡最大总功与A泡最大总功的比值为动能传递率，同理定义势能传递率，两者的计算见式(9)。

$$\eta_k = \frac{\max |W_B|}{\max |W_A|}, \eta_c = \frac{\max |W_{bB}|}{\max |W_{bA}|} \quad (9)$$

上式中 W_A 、 W_B 表示A、B泡的总功, W_{bA} 、 W_{bB} 表示A、B泡的内压做功, 由第2章分析可知, 动能与总功、气泡势能和气泡内压做功存在转换关系, 而双泡系统中无法区分不同气泡对某个区域动能的贡献, 因而在此以总功的变化代替动能的变化表示在双泡运动过程中的动能传递(势能传递同理)。

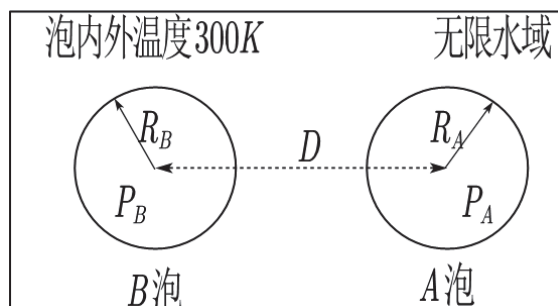


图7 双气泡 CFD 模型

4.2 结果分析

典型工况下的双泡建模参数见表2，水体的建模参数见表1，CFD结果见图8。

表2 典型工况双泡建模参数

类别	A 泡			B 泡			其他因素
参数	内压	温度	初始半径	内压	温度	初始半径	间距
单位	MPa	K	$\times 10^{-4}\text{m}$	MPa	K	$\times 10^{-4}\text{m}$	$\times 10^{-4}\text{m}$
数值	0.1	300	5	60	300	0.5	15

图9中，黑色轮廓表示气泡的形状，图中灰度值越大则速度越大，左为B泡右侧为A泡，可以看到A泡膨胀收缩过程似乎不受B泡影响但是后期发生溃灭产生相反射流，B泡在形态上发生较大的变化也产生未击穿的相反射流。在其它工况下也会发生相反射流(存在击穿B泡的射流，如果两泡的初始条件接近则会发生相对射流)以及发生明显的气泡相对运动。

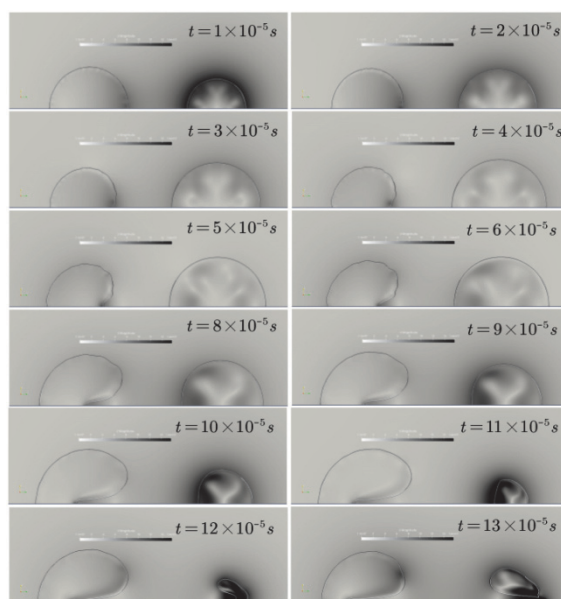


图8 典型工况下的流场变化过程

接下来分析该工况下的两泡的体积、功的变化，结果见图9和图10，并注意A泡的运动周期是接近B泡的运动周期的2倍。

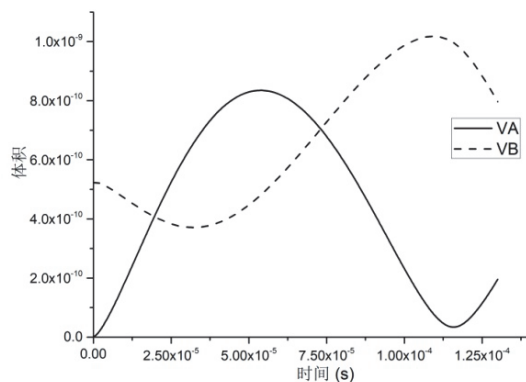


图9 双泡体积随时间变化

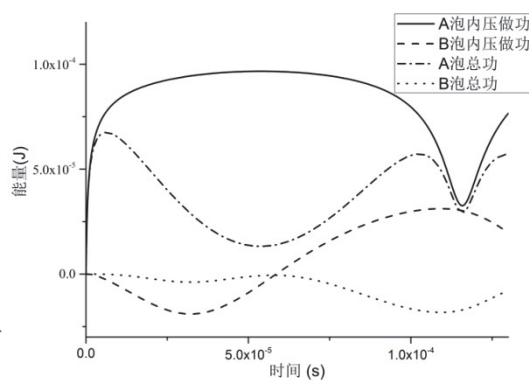


图10 双泡做功随时间变化

图9中，由于B泡相对于A泡蕴含的能量过小，因而A泡的体积变化不太受B泡的影响和单泡下的脉动结果基本一致，而B泡先接收到A泡的能量从而发生收缩，当积累到足够能量时发生类似单泡的脉动。图10中，A泡内压做正功能量减少，A泡总功变化和单泡情况类似；而B泡不太相同，内压先做负功势能增加，随后做正功势能减少，B泡总功始终为负，即双泡运动过程中B泡总是保持储能状态但也存在能量释放的过程。

4.3 参数影响分析

通过研究参数 P_A , D , R_B 对结果的影响以下分 3×5 共13组不同工况(3、8、13组为典型工况)对进行CFD实验,得到的能量传递率结果见表3。

由表3可得 P_A , D , R_B 这3个参数对能量传递的影响规律: P_A 越大动能传递率越大而势能传递率越小; D 其越大动能传递率和势能传递率都越小; 随着 R_B 越大, 势能传递率持续增大而动能传递率先增大后减小。

表3 不同初始条件下的能量传递率

数据 编号	P_A (MPa)	D (mm)	R_B (mm)	η_k 1	η_c 1
1	40	1.5	0.5	0.2272	0.3360
2	50	1.5	0.5	0.2512	0.3279
3	60	1.5	0.5	0.2704	0.3226
4	70	1.5	0.5	0.2847	0.3112
5	80	1.5	0.5	0.2952	0.2979
6	60	1.1	0.5	0.4153	0.3985
7	60	1.3	0.5	0.3380	0.3587
8	60	1.5	0.5	0.2704	0.3226
9	60	1.7	0.5	0.2168	0.2847
10	60	1.9	0.5	0.1769	0.2596
11	60	1.5	0.3	0.1420	0.1502
12	60	1.5	0.4	0.2315	0.1956
13	60	1.5	0.5	0.2704	0.3226
14	60	1.5	0.6	0.2521	0.4098
15	60	1.5	0.7	0.2028	0.4873

三组实验在图形上最为显著区别: 随着 P_A 增大B泡会产生更大、更快的变形(对应能量传递率递增), A泡形态在不同 P_A 下变化不明显。随着 D 的减小, 而B泡产生的射流越来越激烈(对应动能传递率递增且增幅较大), 而A泡都产生明显射流。对比不同的 R_B , 随着 R_B 的增大, B泡占有的空间增大, 因而最终的变形量最大, 由于B泡内压的不确定性无法判断其势能的变化, 但通过表3可以发现势能传递率持续上升并有较大增幅, 对流场的观测发现总体上B泡周围的速度是减小的, 因此认为 R_B 增大的结果是势能储存量的增加。

总结3个参数对能量传递的影响以及双泡对应现象: P_A 对能量的传递率有明显的影响; 间距 D 对气泡运动的剧烈程度有明显的影响; R_B 反映能量的储存, 对势能的传递更为敏感。当然, 三个参数的影响是耦合的, 比如更大的 R_B 在一定程度上会影响气泡运动的剧烈程度。

5 总结

针对气泡群溃灭压力产生机理,通过构建能量模型探索单泡与水体的功能关系。首先对比可压缩Keller-Herring气泡动力学方程计算半径以及考虑了液体可压缩性的OpenFOAM算例计算半径,发现两者基本吻合;之后通过CFD验证能量模型的准确性,发现动能与总功在第一周期基本相同而气泡势能的绝对值与内压做功变化趋势基本一致;随后把能量模型运用于双泡模型并进行建模,结果发现双泡运动与能量变化存在关系并由 P_A, D, R_B 这3个参数所支配;本文对这些参数进行定量分析,发现这3个参数会影响气泡运动的剧烈程度以及B泡的储能能力,随后定性描述3个参数如何影响气泡的运动。

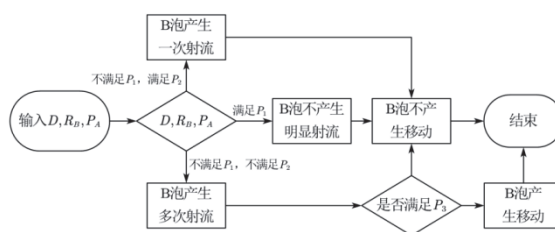


图11不同参数对双泡运动过程的影响

实际上,本文同样发现双泡运动存在溃灭周期延长现象,同时相对射流、相反射流以及气泡迁移等现象的发生存在临界条件,将其规律总结如图11所示,当满足相应条件 P 时可得到对应结论。之后的工作重点是定量研究能量与气泡运动之间的规律,以及通过能量的方法求得区分气泡不同运动的临界条件并完善气泡群能量模型。

参考文献

- 1 Philipp A, Delius M, Scheffczyk C, et al. Interaction of lithotripter - generated shock waves with air bubbles[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1993, 93(5): 2496-2509.
- 2 Bushnell D. Turbulent drag reduction for external flows[C]//21st Aerospace Sciences Meeting. 1983: 227.
- 3 Ohl C D, Arora M, Dijkink R, et al. Surface cleaning from laser-induced cavitation bubbles[J]. Applied physics letters, 2006, 89(7): 074102.
- 4 王诗平, 孙士丽, 张阿漫, 等. 可压缩流场中气泡脉动数值模拟[J]. 力学学报, 2012, 44(3): 513-519.
- 5 王诗平, 张阿漫, 刘云龙, and 王超. 同相气泡耦合特性实验研究. 力学学报, 44(1): 56 - 64, 2012.
- 6 张阿漫, 姚熊亮, 李佳. 气泡群的动态物理特性研究[J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1672-1682.
- 7 张凌新, 闻仲卿, 邵雪明. 多泡相互作用对气泡溃灭的影响[J]. 力学学报, 2013, 45(6): 861-867.

- 8 王德鑫. 耦合双泡声空化特性的理论研究[J]. 物理学报, 2018, 67(3): 201-208.
- 9 清河美. 空化多泡中大气泡对小气泡空化效应的影响[J]. 物理学报, 68(23): 234302.
- 10 Lauer E, Hu X Y, Hickel S, et al. Numerical investigation of collapsing cavity arrays[J]. Physics of Fluids, 2012, 24(5): 052104.
- 11 Merouani S, Hamdaoui O, Rezgui Y, et al. Energy analysis during acoustic bubble oscillations: relationship between bubble energy and sonochemical parameters[J]. Ultrasonics, 2014, 54(1): 227-232.
- 12 Didenko Y T, Suslick K S. The energy efficiency of formation of photons, radicals and ions during single-bubble cavitation[J]. Nature, 2002, 418(6896): 394-397.
- 13 A Tiwari, C Pantano, and JB Freund. Growth-and-collapse dynamics of small bubble clusters near a wall. Journal of Fluid Mechanics. 775:1-23, 2015.

Interaction during bubble collapse

BIAN Zhen-dong¹, DU Te-zhuan²

(1. NUC, Taiyuan, 038507. Email: zhend_b@qq.com)

(2. Engineering Science, Beijing, 100080. Email: dutezhuan@imech.ac.cn, Corresponding Author)

Abstract: In this paper, using OpenFOAM to explore the energy changes of bubble model in infinite waters. Firstly, the CFD calculation model is verified by the compressible Keller-Herring bubble dynamics equation. The results show that the parameters such as radius, pressure and temperature obtained by CFD simulation are in good agreement with the theoretical solution and the corresponding references. Secondly, it is confirmed that the results of kinetic energy and total work in energy model are basically consistent, and the trend of bubble potential energy and bubble-work is consistent. On the basis of single bubble energy analysis, the energy transfer of double bubble pulsation process under more general conditions is studied. The effects of bubble spacing, inner pressure of A bubble and initial radius of B bubble on the interaction between two bubbles are analyzed, and the energy transfer during the interaction between two bubbles is given, including the change of volume and work. The influence of P_A , D and R_B on energy transfer is obtained: the greater d is, the smaller the kinetic energy transfer rate and potential energy transfer rate are; The larger P_A is, the greater dynamic energy transfer rate is and the smaller potential energy transfer rate is. With the increase of R_B , the potential energy transfer rate increases continuously, while the kinetic energy transfer increases first and then decreases.

Key words: OpenFOAM; Functional relationship; Bubble dynamics; Double bubble

两种壁面沟槽类型对 TLV 抑制机理的模拟研究

毕桢, 张凌新, 邵雪明

(浙江大学 工程力学系, 杭州, 310027, Email: zhanglingxin@zju.edu.cn)

摘要: 在诸多对 TLV 的控制方法中, 在外壳壁面开槽的被动控制方法较为经济、有效, 但沟槽抑制的机理, 沟槽方向对抑制效果的影响目前仍不明确。为了揭示沟槽对泄漏涡的影响机制并进一步提升沟槽的抑制能力, 采用数值模拟方法, 利用 NACA0009 平直翼产生泄漏涡, 在固壁面分别布置水平 (C 型槽) 和竖直 (J 型槽) 两组不同方向沟槽, 研究其间隙内和沟槽内流场分布。结果发现, 两类沟槽的抑制机理并不相同。J 型槽下 TLV 涡强较大, 同时涡心轴向速度衰减较快使漩涡快速失稳以截断 TLV; C 型槽下 TLV 受耗散影响严重, 漩涡强度始终较小。

关键词: TLV; 壁面沟槽; 数值模拟; 抑制

1 引言

间隙结构广泛存在于轴流式透平机械中, 而叶片吸力面和压力面造成的压差, 会间隙附近产生与主流反向的泄漏流动, 不仅造成容积损失, 还会诱发泄漏涡的生成。涡心低压足以引发空化, 进而造成空蚀和震动等问题。为了减小泄漏流动带来的负面效应, 可采取的措施主要有主动控制和被动控制两种方法。主动控制顾名思义, 通常需要额外的装置, 通过吹流或抽吸等方式起到消除泄露流动的效果。但主动控制花费成本高, 而且增加的复杂结构不利于机械运行的可靠性。

相对而言, 被动控制性价比较高, 无需添加额外设备, 通过对过流部件结构进行局部处理以改变间隙流动特征, 破坏泄漏涡形成的条件。其中机匣开槽的方法则最为简单和通用。自 1970 年以来, 不同类型的壁面沟槽法广泛使用于各种旋转机械中, 主要为沿轴向的机匣 J 型槽和沿径向的机匣 C 型槽。Saha 等^[1]首先在混流泵外壳上应用中应用了这种沟槽, 发

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (No.91852204)

现 J 型槽可减弱泵内旋涡与空化的强度。Choi 等^[2]在诱导轮外壳和弗朗西斯水轮机的尾水管中都尝试采用 J 型沟槽抑制旋涡空化，均取得良好效果。C 型槽其为沿周向分布的单个矩形槽，成组出现的 C 型槽形同螺纹，因此又被成为螺纹槽。这一类型的沟槽大多见于压缩机等气动领域，如 Müller 等^[3]在单级跨声速压缩机上加装了四种不同的 C 型槽，发现即使在非设计工况，所有 C 型槽都有助于改善失速裕度。Smith 等^[4]同样采用 C 型槽增大压缩机的失速余量，且压缩机效率并没有受到明显影响。

综上所述，机匣壁面开槽的方法确实有助于改善间隙流动结构并提升整机性能，但沟槽对间隙泄漏流的作用机制却无定论。Gumusel^[5]发现壁面沟槽可减小间隙泄漏从而减小 TLV 中的轴向动量亏损。Rabe and Hah^[6]认为沟槽会带来对叶片压力面附近的流动方向的改变，流体进入和流出沟槽时产生的局部流场变化等多方面影响。沟槽抑制机理不确定的原因，一是由于受限于实验结构，难以对沟槽和间隙内的流动进行直接观测；二是前人的研究通常在整机中进行，受到叶片旋转带来的剪切流、动静干涉等多种因素干扰。

为了弥补这些不足，单纯揭示不同类型沟槽与间隙泄漏流动之间的作用机制，选取二维翼型 NACA0009 制造间隙流动，分别对间隙侧壁面施加 J 型和 C 型槽，采用数值模拟方法在全湿流条件下计算翼尖和沟槽内流场结构，对比分析对施加不同沟槽和光滑壁面下间隙流动差异和 TLV 发展变化过程。

2 模拟方法与验证

光滑壁面计算域如图 1 所示，本次研究中保持间隙大小为 2mm，对 J、C 两种沟槽类型都进行了研究，沟槽宽度与深度均为 1mm，间隔为 2mm。采用 NACA0009 水翼制造间隙流动，其弦长与展长均为 0.1m，最大厚度为 10mm，来流速度为 10m/s，攻角固定为 10°。

为了方便带沟槽结构的流场计算，文献中大多将沟槽区域和主流区域分为不同计算域，再使用交界面的方法将两部分数据插值耦合。但经我们尝试发现，这种方式下交界面两侧的速度梯度可能出现突变。为了避免这一问题，本次研究采用了切割体网格实现了整体网格划分。两类沟槽网格的轴向截面如图 2 所示。沟槽内采用均匀网格，而水翼表面采用棱柱层网格加密。基于水翼弦长的沟槽壁面 y^+ 约为 10，水翼表面和间隙侧壁面为 30~50。在 OpenFOAM 平台采用 $k-\omega$ SST IDDES 湍流模型，通过 PIMPLE 算法进行流场求解。

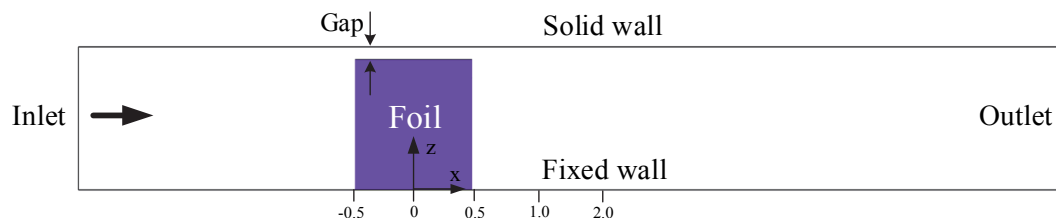


图 1 计算域示意图

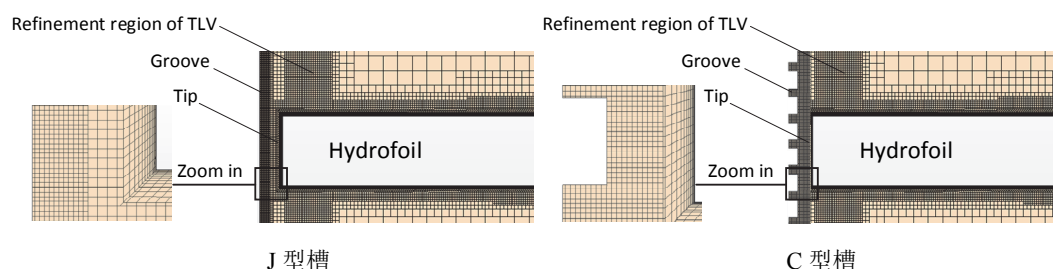


图2 网格划分

3 流场结果分析

图3所示为压力系数分布，TLV造成的低压区十分明显。其中可以看出，与无沟槽工况相比，加装壁面沟槽后水翼中下游区域漩涡内压力值有所升高，同时低压区更早消失。不同的是，J型槽下在水翼前缘低压区似乎更加明显，在水翼中下游位置突然缩减。而C型槽下TLV从初生至耗散整个过程内强度均较弱。因此虽然两类沟槽都对TLV均表现出抑制作用，但其效果和机制可能不完全相同。TLV的主要特征由切向速度和轴向速度决定，为了观察施加沟槽后TLV的特征变化，下面对切向速度速度和涡心轴向速度进行分析。

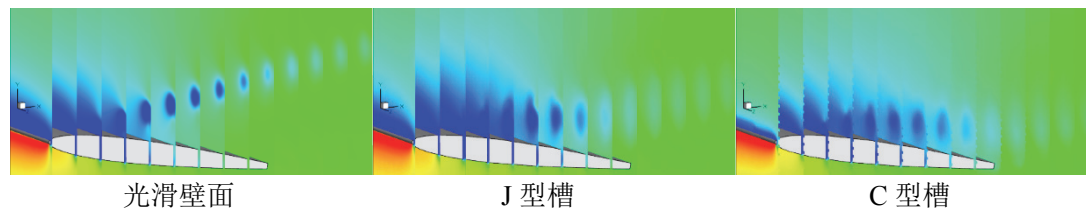


图3 压力系数分布

由于壁面会造成TLV切向速度的不对称性，沿展向分布的切向速度包含最大切向速度值和最大涡核半径的信息，因此采集沿展向的切向速度分布如图4所示。其中光滑壁面时近壁侧切向速度分布更规整，施加沟槽后TLV与沟槽内流动相互作用，导致曲线近壁侧出现紊乱。J型槽下最大切向速度与光滑壁面时接近，而C型槽下明显较小。在间隙内过弦长的截面上计算泄漏量，结果如表1所示。其中可以看出，J型槽由于增大了平均间隙尺度，泄漏量随之增大，而C型槽下间隙内射流速度较小，泄漏量也较小。在间隙较小的情况下可以认为间隙射流基本全部转化为TLV，因此J型槽TLV强度较大，切向速度峰值更高。C型槽下间隙流动对TLV的补充作用较弱，切向速度峰值也较小。此外，在表1中还可以发现，当TLV被抑制时，水翼升力系数减小，这一趋势与升力环量定理也是一致的。

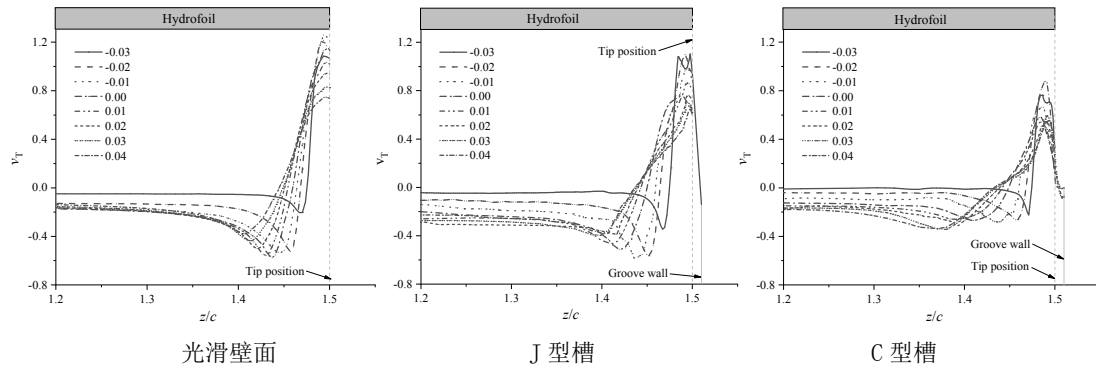


图 4 TLV 切向速度分布

表 1 不同工况下泄漏率及升力系数

工况	光滑壁面	J 型槽	C 型槽
泄漏率	0.579	0.626	0.451
升力系数	1.14	1.07	0.97

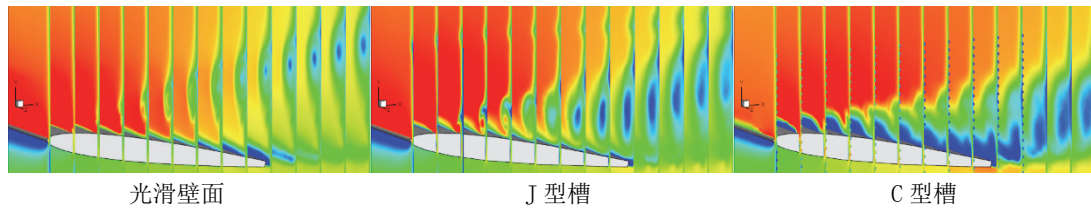


图 5 轴向速度分布

3 种不同壁面工况下轴向速度差异如图 5 所示。可以看出，对光滑壁面和 J 型槽而言，TLV 在水翼前缘的初生和发展阶段涡心速度均明显大于来流速度，呈射流态。J 型槽下在水翼中下游轴向速度突然转变为小于来流速度的尾流态。光滑壁面下虽出现了这一流态转变，但变化过程较缓慢。对 C 型槽而言，涡心轴向流态持续减小，没有出现突变现象。在图 4 切向速度分布中可以看出，C 型槽涡核半径和最大切向速度都较小，并且没有出现剧烈变化，这是造成其涡心轴向速度较小且平稳发展的主要原因。

在早期对涡稳定性的研究中，Hall^[7]发现涡心逆压梯度是造成涡裂解的主要原因，如式（1）所示。其中可以看出，若漩涡生长，即涡核半径增大时，以及涡强增大或涡心轴向速度衰减时都将造成涡心逆压梯度的急剧增大。但是间隙流动涉及多个涡之间相互作用，流场结构十分复杂，因此从中简化，采用最关键的两个参数即切向速度和轴向速度定义涡螺旋角如式（2）所示。 v_t 为最大切向速度， u 为涡心轴向速度。Hall 发现漩涡破裂时螺旋角总大于 50 度。不同壁面条件下螺旋角如图 6 所示。可以看出在向下游发展过程中，J 型沟槽下 TLV 在水翼中部失去轴向动量补偿并保持较大旋转强度，很快达到裂解条件而突然消失；C 型槽涡强总是较小，受槽内反向涡量作用逐渐耗散消失。

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{r=0} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{\infty} + \rho \int_0^{\infty} \frac{\Gamma}{r^3} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \frac{v_r}{u} dr \quad (1)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_t}{u} \quad (2)$$

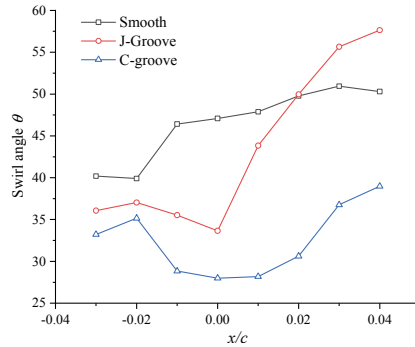


图6 不同壁面条件下 TLV 螺旋角分布

4 结论

本研究通过数值模拟方法计算了带沟槽壁面下的间隙流动特征和 TLV 演化过程,发现了两类沟槽对 TLV 抑制方式有所不同。J 型沟槽下 TLV 切向速度峰值较高,在水翼前缘漩涡强度大,但之后涡心轴向速度衰减很快,较早达到涡不稳定条件并裂解。C 型槽内布满与 TLV 旋转方向相反的漩涡,在剪切耗散作用下泄漏量较少,使 TLV 强度始终较小。

参考文献

- 1 Saha S L, Kurokawa J, Matsui J, et al. Suppression of performance curve instability of a mixed flow pump by use of J-groove, ASME J. Fluids Eng., 2000,122: 592-597.
- 2 Choi YD, Kurokawa J, Imamura H. Suppression of cavitation in inducers by J-Grooves. J Fluids Eng., 2007, 129: 15-22.
- 3 Müller MW, Schiffer H-P, Hah C. Effect of circumferential grooves on the aerodynamic performance of an axial single-stage transonic compressor. ASME paper 2007-GT-27365.
- 4 G. D. J. Smith, N. A. Cumpsty. Flow phenomena in compressor casing treatment. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1984, 106(3):532-541,
- 5 B. Gumusel, Aerodynamic. Heat Transfer Aspects of Tip and Casing Treatments Used for Turbine Tip Leakage Control, PhD thesis, The Pennsylvania State University, 2008.

- 6 Rabe, D. C., Hah, C. Application of Casing Circumferential Grooves for Improved Stall Margin in a Transonic Axial Compressor. ASME Paper No. GT2002-30641, 2002.
- 7 M. G. Hall. A new approach to vortex breakdown. Proceedings of the Heat and Transactions and Fluid Mechanics Institute, University of California, San Diego, La Jolla, 1967, 319-40

Numerical study of suppression effect of casing grooves on tip leakage vortex

BI Zhen, ZHANG Ling-xin, SHAO Xue-ming

(State Key Laboratory of Fluid Power and Mechatronic Systems, Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027

Email: zhanglingxin@zju.edu.cn)

Abstract: In order to reveal the mechanism of casing groove on the TLV and enhance its suppression performance, numerical investigations were conducted. A NACA0009 hydrofoil was selected to create TLV and two types of casing groove which in horizon (C-groove) and vertical (J-groove) directions were carried out on the solid wall surface. Through the analysis of flow fields in gaps and grooves, we found that the suppression mechanism of two types of groove on TLV are different. With J-groove configuration, the TLV was stronger while the axial velocity in vortex center reduced rapidly, the TLV was less stable. With C-groove configuration, the TLV was dissipated seriously by small vortex within the grooves, resulting a small intensity during its whole evolution process.

Key words: TLV; casing groove; numerical simulation; suppression

自由响应双浮体窄缝内流体共振研究

李娅杰, 黄亚冬, 龙云*

(江苏大学 流体机械工程技术研究中心, 镇江, 212013, Email: longyun@ujs.edu.cn)

摘要: 海洋工程中, 对并靠作业多浮体系统间隙内流体共振研究有着重要的工程意义。本研究采用基于完全非线性势流理论的边界元方法来研究波诱导的自由响应双浮体间隙内流体共振, 旨在通过与固定浮体间隙内共振现象对比来分析浮体运动响应对间隙内共振频率的影响。允许浮体在来波作用下自由响应时, 存在波浪力和运动的耦合, 采用耦合辅助函数法来解耦。数值模拟主要包含小波陡规则波作用下的窄缝内升沉运动模态。结果表明浮体运动会降低间隙内流体的共振频率, 而且间隙共振反过来也会大大影响浮体运动形态, 尤其是水平运动, 比如两浮体在升沉运动模态下的反向运动。

关键词: 窄缝流体共振; 耦合辅助函数法; 自由运动浮体; 升沉运动模态

1 引言

海洋工程中, 并靠作业多浮体系统被广泛应用于深海资源如石油、天然气、可燃冰和矿产等的开发利用。这些多浮体系统由两个或多个浮体构成, 通过系泊系统在海面上保持一定位置, 且浮体之间留有一定间隙。这种具有间隙的浮体系统内部水动力相互作用非常大, 最显著的特征是间隙内流体在一定外界激励(如风、浪、流等)下会产生共振。流体共振一旦发生, 不仅会导致间隙内波高大幅度增加, 加剧两侧毗连浮体运动, 还会严重影响浮体本身稳定性和海上作业人员安全。如何准确计算波浪作用下间隙内流体的共振频率和共振波高、估计浮体所受水动力载荷和波浪爬高、预报浮体的相对运动都是研究人员关注的热点问题。

入射波作用下窄缝内流体共振研究多限定浮体是固定不动的^[1-3], 不涉及浮体运动和周围流场的耦合。然而, 在真实海洋工程应用中, 浮体在外界激励下不可避免的要发生运动。允许波浪作用下浮体响应, 将大大增加模拟难度。Fredriksen 等^[4]用黏势流混合模型研究了波浪作用下自由浮动带月池(moonpool)结构物的运动和月池内流体的振动情况。他们发现允许浮体自由运动不仅能改变月池内最低阶升沉运动模态共振频率 ω_0 , 还可以降低月池内共振波高。Feng 和 Bai^[5]用高阶边界元法结合耦合辅助函数探索了各自自由响应两浮体

以及刚性连接和中间铰链连接两浮体间隙内流体共振现象。Jin 等^[6]用高阶边界元方法分析了迎浪侧浮体运动对窄缝内流体共振的影响。

基于国内外研究现状, 本文将以规则入射波作用下各自自由响应双浮体为研究对象来分析窄缝内流体共振现象。窄缝内主导振动模态为最低阶升沉运动模态。本研究将通过与固定浮体间隙内共振现象对比来探究浮体运动响应对间隙内共振频率的影响。

2 数学模型及耦合辅助函数法

本研究采用经典的完全非线性势流理论来研究两浮体间隙内流体共振现象。以静水面两浮体中点为原点建立笛卡尔坐标系 oxz , 入射波沿 x 轴正向传播, z 轴向上为正。为表述方便, 将迎浪浮体 (左侧浮体) 称为浮体-0, 背浪侧浮体 (右侧浮体) 称为浮体-1 (图 1)。两浮体由各自系泊缆提供水平恢复力, 以防止浮体漂移。浮体在入射波作用下在平衡位置附近震荡。假定浮体为均匀的, 它的重心位于各自对称线上, 垂直方向距离静水面 z_g 。且流体无黏性、流动无旋, 整个流域可以用速度势 ϕ 来描述。

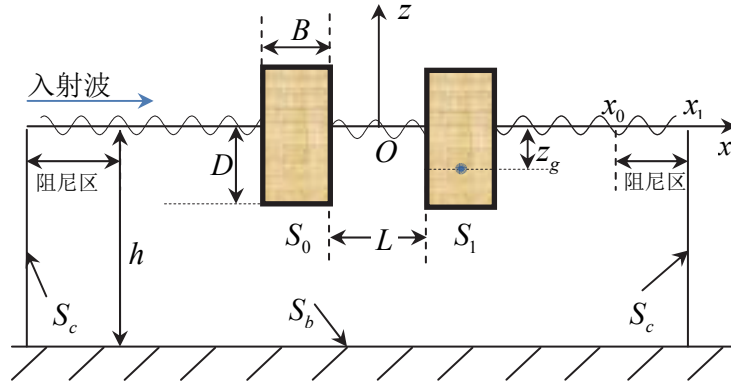


图 1 两浮体间隙流体晃荡示意图

总的速度势可以表示为已知入射势 ϕ_i 和未知扰动势 ϕ_D 的叠加^[7], 其中扰动势包含物体固定绕射势和物体运动的双重影响。依据势流理论, 可推导出 ϕ_D 满足以下方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_D = 0, & \text{在流体域内} \\ \frac{D\phi_D}{Dt} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_D|^2 - \frac{1}{2} |\nabla \phi_i|^2 - g\eta, & \text{在自由面上} \\ \frac{\partial \phi_D}{\partial n} = (\bar{U}_i + \bar{\Omega}_i \times \bar{X}_i - \nabla \phi_i) \cdot \bar{n}, \quad i = 0, 1. & \text{在湿物面上} \\ \frac{\partial \phi_D}{\partial n} = -\nabla \phi_i \cdot \bar{n} & \text{在其他边界上} \end{cases} \quad (1)$$

D/Dt 表示流体的质点导数, $\overline{U}_i, \overline{\Omega}_i$ 表示两浮体的平移速度和绕各自重心的转动角速度, $\overline{X}_i$ 表示贴体坐标系下相对各自重心的位置矢量, $\vec{n}$ 表示单位法向量。在计算域截断边界前设置一定长度阻尼区, 用来吸收截断边界的反射波。阻尼区的设置和长度、阻尼系数同文献[8]。本文用边界元方法求解某一时刻有关 ϕ_D 的初边值问题, 然后用二阶 Runge-Kutta 法更新下一时刻的水质点位置和自由面上的速度势。边界元方法和时间步进详见文献[9]。

某一时刻浮体所受波浪力和力矩可通过液体压强沿浮体湿表面积分来计算, 即:

$$\vec{F}_i = -\rho \int_{S_i} \left(\phi_i + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz \right) \vec{n} dL, \quad \vec{M}_i = -\rho \int_{S_i} \left(\phi_i + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz \right) (\overline{X}_i \times \vec{n}) dL. \quad i=0,1 \quad (2)$$

根据牛顿第二运动定律, 有

$$[M_b][A] = [F_h] + [F_e], \quad (3)$$

式中, $[M_b]$ 为浮体质量和转动惯量组成的对角矩阵, $[A]$ 为浮体平移和转动加速度组成的列向量, $[F_h]$ 为浮体所受波浪力和力矩列向量, 分量表达式见式(2), $[F_e]$ 为浮体所受外力列向量。上式中 $[A]$ 和 $[F_h]$ 是耦合的, 相互依赖。耦合辅助函数法^[10]根据系统自由度个数引入辅助函数 χ_j ($j=1,2,\dots,6$) 来解耦波浪力和浮体运动。该方法要求各辅助函数满足以下控制方程和边界条件

$$\begin{cases} \nabla^2 \chi_j = 0, & \text{在流体域内} \\ \chi_j = 0, & \text{在自由面上} \\ \frac{\partial \chi_j}{\partial n} = n_j, & \text{在湿物面上} \\ \frac{\partial \chi_j}{\partial n} = 0. & \text{在其他边界上} \end{cases} \quad (4)$$

湿物面边界条件 n_j 对应式(2)中被积函数的后一项。依据格林第二公式, 可得

$$\int_{S_f+S_1+S_0+S_c+S_b} \left(\phi_i \frac{\partial \chi_j}{\partial n} - \chi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dL = \int_{\text{fluid}} (\phi_i \nabla^2 \chi_j - \chi_j \nabla^2 \phi_i) ds = 0. \quad (5)$$

简化式(5)即可获得 $\int_{S_i} \phi_i n_j dL$ ($i=0, j=1,2,3; i=1, j=4,5,6$) 的表达式, 它包含波浪力已知部分和与浮体运动加速度有关未知部分。将 $\int_{S_i} \phi_i n_j dL$ 的表达式带入式(3), 并将所有未知量移到方程左端, 可以得到

$$([M_b]+[C])[A]=[Q]+[F_e], \quad (6)$$

$[C]$ 可以看作是附加质量系数矩阵, $[Q]$ 为已知量。 $[C]$ 和 $[Q]$ 的表达式如下:

$$C_{ij} = \rho \int_{S_0} \chi_i n_j dl, \quad j=1,2; \quad C_{ij} = -\rho \int_{S_0} \chi_i n_j dl, \quad j=3; \quad i=1,2,\dots,6 \quad (7)$$

$$C_{ij} = \rho \int_{S_1} \chi_i n_j dl, \quad j=4,5; \quad C_{ij} = -\rho \int_{S_1} \chi_i n_j dl, \quad j=6; \quad i=1,2,\dots,6 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Q_{i,j} = & -\rho \left(\int_{S_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz \right) n_j dl + \int_{S_j} \left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta \right) \frac{\partial \chi_j}{\partial n} dl + \int_{S_c} \chi_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial t} \right) dl \right) \\ & + \rho \int_{S_0} \chi_j \left(\Omega_0 n_z (U_0 - \phi_x) - \Omega_0 n_x (V_0 - \phi_z) + (U_0 - \Omega_0 Z_0) \frac{\partial \phi_x}{\partial n} + (V_0 + \Omega_0 X_0) \frac{\partial \phi_z}{\partial n} \right) dl \\ & + \rho \int_{S_1} \chi_j \left(\Omega_1 n_z (U_1 - \phi_x) - \Omega_1 n_x (V_1 - \phi_z) + (U_1 - \Omega_1 Z_1) \frac{\partial \phi_x}{\partial n} + (V_1 + \Omega_1 X_1) \frac{\partial \phi_z}{\partial n} \right) dl, \\ & (i=0, \quad j=1,2,3; \quad i=1, \quad j=4,5,6) \end{aligned} \quad (9)$$

求解线性方程(6)即可直接获得两个浮体运动的加速度, 然后利用牛顿第二定律求得浮体所受波浪力和力矩。

3 验证与结果分析

为验证上述数值模拟方法和计算程序的准确性, 我们将计算结果与已有试验和数值结果做对比, 如下图 所示。图中计算参数设置与 Saitoh 等^[1]试验一致, 且数值结果已经做过收敛性分析。通过对比发现该数值模型可以准确捕捉间隙内波高和计算浮体所受波浪力。

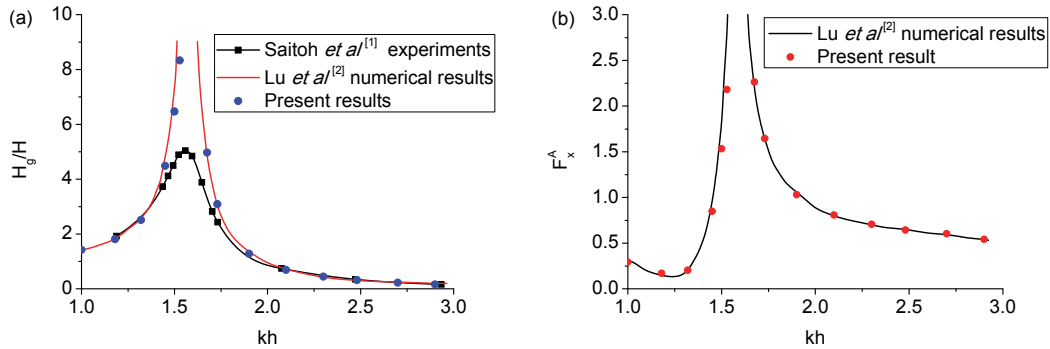


图 2 数值模拟结果与已知结果对比: (a) 间隙内平均波高; (b) 迎浪浮体水平受力幅值

现给定入射波为5阶Stokes波。用流体密度 ρ 、浮体宽度 B 和重力加速度 g 对物理量进

行无量纲化。模拟中浮体吃水 $D=1$ 。系泊缆简化为刚度系数为 $\kappa_0 = \kappa_1 = 2.0$ 的线性弹簧。设置浮体重心位置 $z_g = -0.1$ ，且转动惯量 $I_0 = I_1 = 20$ 。这些参数将直接影响浮体在入射波作用下的运动，进而影响固有频率偏移量。

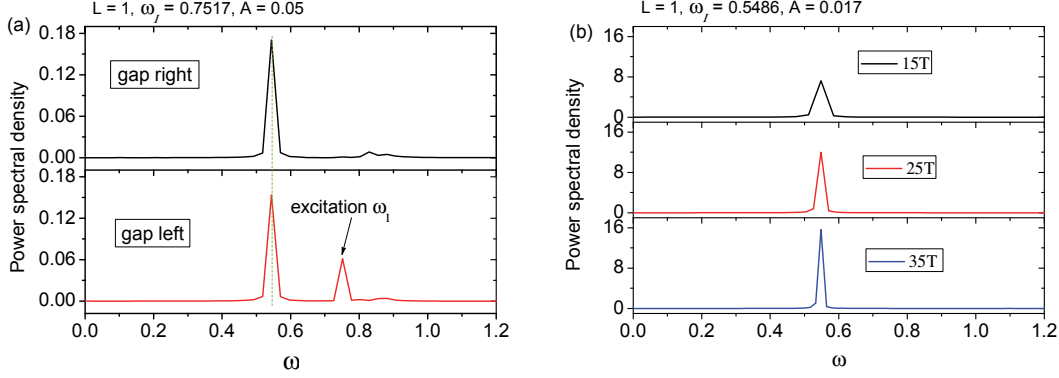


图 3 不同频率入射波作用下间隙内波浪爬升功率谱密度分析: (a) $\omega_l = 0.7517$; (b) $\omega_l = 0.5486$

前期研究^[8]已获得当浮体固定时, $L=1$ 对应 $\omega_0 = 0.7517$ 。先给出波陡 $\varepsilon = 0.0283$, $\omega_l = 0.7517$ 时间隙内波浪爬升时间历程对应的功率谱密度 (图 3a)。从图 3a 可以明显看出间隙内存在激励频率以外的主要频率 $\omega = 0.5486$ 。为了测试 $\omega = 0.5486$ 是不是升沉运动共振频率, 采用波陡 $\varepsilon = 0.005$ 的入射波, 得到间隙内右侧波浪爬升不同时间段内的功率谱密度 (图 3b)。对比图 b 中 15、25 和 35 个周期的功率谱密度变化, 可以明显看出共振的发生。由于浮体运动, 间隙内升沉运动固有频率从 0.7517 下降到了 0.5486。

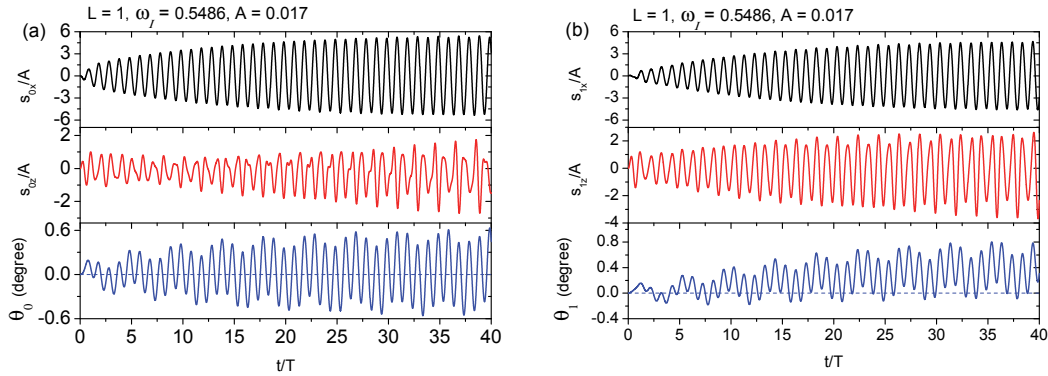


图 4 $\omega_l = 0.5486$ 时两浮体横荡、垂荡和横摇曲线: (a)迎浪侧浮体; (b)背浪侧浮体

图 4 给出了升沉运动模态共振发生时两浮体横荡、垂荡和横摇时间曲线。两浮体水平运动幅值随时间缓慢增加, 且运动方向相反。这是由于浮体运动受制于间隙内流体运动形式 (见下图 5)。在升沉运动模式下, 间隙内流体被周期性的吸入和流出, 且幅值不断增加。

当流体吸入时, 间隙内液面高于静水面, 这导致浮体-0 所受水平力向左, 浮体-1 水平力向右, 两浮体被推开。当流体流出时, 间隙内液面低于静水面, 致使浮体-0 所受水平力向右, 浮体-1 水平力向左, 两浮体被拉近。因此间隙宽度也周期性的扩大和缩小。浮体垂荡和横摇没有表现出鲜明的共振特性, 运动明显由多个频率共同支配。

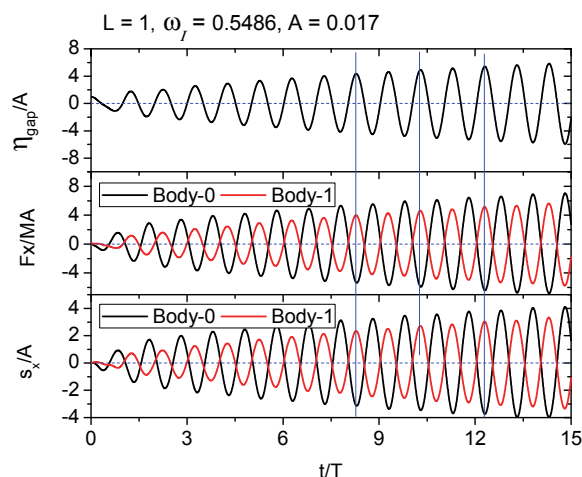


图 1 间隙内平均波高和浮体水平力和水平运动关系

4 结论

通过耦合辅助函数法, 在时域内模拟了规则波作用下自由响应双浮体窄缝内升沉运动模态。计算结果表明浮体运动会降低间隙内流体的共振频率, 而且间隙共振反过来也会大大影响浮体运动形态, 尤其是水平运动, 比如两浮体在升沉运动模态下的反向运动。

参考文献

- 1 Saitoh T, Miao G, Ishida H. Theoretical analysis on appearance condition of fluid resonance in a narrow gap between two modules of very large floating structure[C]. Proc. 3rd Asia-Pacific Work. Mar. Hydrodyn., 2006, p. 170-5.
- 2 Lu L, Teng B, Sun L, Chen B. Modelling of multi-bodies in close proximity under water waves - Fluid forces on floating bodies[J]. Ocean Engineering, 2011, 38: 1403-16.
- 3 Gao J, Zang J, Chen L, Chen Q, Ding H, Liu Y. On hydrodynamic characteristics of gap resonance between two fixed bodies in close proximity[J]. Ocean Engineering, 2019, 173: 28-44.
- 4 Fredriksen AG, Kristiansen T, Faltinsen OM. Wave-induced response of a floating two-dimensional body with a moonpool[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2015, 373: 20140109.

- 5 Feng X, Bai W. Hydrodynamic analysis of marine multibody systems by a nonlinear coupled model[J]. Journal of Fluids and Structures, 2017, 70: 72-101.
- 6 Jin R, Ning D, Bai W, Geng B. The influence of up-wave barge motion on the water resonance at a narrow gap between two rectangular barges underwaves in the sea[J]. Acta Oceanologica Sinica, 2018, 37: 68-76.
- 7 Ferrant P. Simulation of strongly nonlinear wave generation and wave-body interactions using a 3D MEL model[C]. Proc. 21st Symp. Nav. Hydrodyn., 1996, p. 93-108.
- 8 Li Y, Zhang C. Analysis of wave resonance in gap between two heaving barges[J]. Ocean Engineering, 2016, 117: 210-20.
- 9 Li Y. Fully nonlinear analysis of second-order gap resonance between two floating barges[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2019, 106: 1-19.
- 10 Wu GX, Eatock Taylor R. The coupled finite element and boundary element analysis of nonlinear interactions between waves and bodies. Ocean Engineering, 2003, 30: 387-400.

Numerical study on fluid resonance in narrow gap between twin floating barges

LI Ya-jie, HUANG Ya-dong, LONG Yun*

(Research Center of Fluid Machinery Engineering and Technology, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China.

Email: longyun@ujs.edu.cn)

Abstract: In marine engineering, it is of great significance to study the fluid resonance in the gap between side-by-side operation structures. In this paper, boundary element method based on the fully nonlinear potential flow theory is used to study the wave-induced fluid resonance in the gap between twin freely floating bodies. The primary aim is to analyze the effect of floating body motion response on the resonance frequency in the gap, by comparing with the resonance phenomenon in the gap of the fixed bodies. When the body is allowed to respond freely under incoming waves, there is a coupling between wave force and motion. In this paper, the coupled auxiliary function method is used to decouple them. The numerical simulation mainly includes the piston mode resonance in the narrow gap under small steepness regular wave. The results show that the motion of the body will reduce the resonance frequency of the fluid in the gap, and in turn, the gap resonance will greatly affect the pattern of the floating body motion, especially the horizontal motion. Specifically, the two bodies move horizontally in the opposite direction in piston motion mode.

Key words: gap resonance; coupled auxiliary functions method; freely floating barges; piston mode

基于仿生端面结构的水翼叶顶泄漏流消涡控制数值研究

黄亚冬, 张德胜, 李娅杰, 顾发东

(江苏大学 国家水泵及系统工程技术研究中心, 镇江 212013, Email: ydhuang@ujs.edu.cn)

摘要: 叶顶泄漏流广泛存在于透平机械中, 其中不稳定涡结构引起的噪声、振动、流道阻塞、流动损失等严重制约了透平机械综合性能的提升。本研究采用层次结构化网格下的有限体积法, 数值分析了 NACA0009 水翼在雷诺数 $Re=1\times 10^6$ 、攻角 $\alpha=5^\circ$ 、叶顶间隙 $\tau/c=0.1$ (c 是水翼弦长) 时, 端面仿生球形凹坑对叶顶泄漏流中涡结构的控制效果。结果表明, 仿生球形凹坑使得叶顶泄漏流中难以形成规则的分离涡和泄漏涡, 从而阻碍尾缘处这两种涡的融合, 且尾迹涡中心负压值减小。同时, 叶顶间隙区流向速度增加, 其他方向速度减小, 表明流动损失降低。由于叶顶间隙区流向速度增加, 水翼受到的流向阻力增加, 但展向阻力减小, 同时升力增加, 表明仿生球形凹坑不仅可以消涡也可以提高水翼的力学性能。

关键词: NACA0009 水翼; 叶顶泄漏流; 仿生球形凹坑; 消涡

1 引言

随着海洋强国战略的提出, 人们对水中航行器动力装置性能要求越来越高。泵喷推进以其噪声小、效率高、推力大等优点, 成为新一代推进技术, 被广泛应用于舰船、潜艇、航母上。然而, 泵喷推进器中叶片与端壁之间的间隙易导致叶顶泄漏流, 泄漏流中的分离涡、二次涡以及泄漏涡会造成流道阻塞, 增加叶片振动, 引起流动损失。由于涡中心压力较低, 已发生空化, 形成的空泡发生溃灭后会对叶轮造成损伤, 严重影响了泵喷推进器的性能。此外, 在燃气轮机、压缩机、喷水推进泵、轴流泵、混流泵以及多相泵中, 叶顶泄漏流中的不稳定涡结构都会使其工作效率降低。由此可知, 叶顶泄漏流中的不稳定涡结构已然成为制约透平机械性能提升的“卡脖子问题”, 解决这一问题的关键就是消涡。

为了寻找有效控制叶顶泄漏流的方法, 研究人员付出了巨大而艰辛的劳动。现有控制叶顶泄漏流的方法主要有主动控制方法和被动控制方法, 其中主动控制方法主要有等离子体激励器^[1]、叶顶射流^[2]、叶顶或端壁抽吸^[3], 被动控制方法主要有叶顶沟槽^[4]、端壁沟槽^[5]、叶顶小翼^[6]、叶顶沟槽小翼^[7]、叶顶修型^[8]。近年来, 研究人员提出基于叶顶蜂窝结构的控

制方法,即在叶顶布置规则排列的蜂窝结构^[9],通过蜂窝腔内流体的漩涡运动,耗散间隙流能量,增加间隙泄漏流阻力,从而抑制泄漏流。当将蜂窝平底改为球形凹坑底^[10]或棱台底^[11]后,内部漩涡运动增强,对泄漏流的抑制效果更佳。实际上,现有被动控制方法对叶顶或端壁改动较大,且对叶顶泄漏流的控制效果有待改善。

科研人员在蜣螂头部表面发现了球形凹坑结构^[12],这种非光滑表面结构具有减阻、抗粘性和抗磨损等优异特性,可以帮助生物更好地适应生存环境。研究人员发现球形凹坑内部涡结构可以减小边界层中速度梯度,阻碍边界层中湍流猝发过程,降低猝发强度,减小摩擦阻力^[13],控制效果与凹坑的几何尺寸和空间分布密切相关^[14]。球形凹坑内部涡结构特征主要取决于凹坑深宽比 h/D (h 为凹坑深度, D 为凹坑开口直径)和雷诺数^[15]。Ng 等^[16]通过研究凹坑控制下槽道流场中涡量输运机制揭示了球形凹坑减阻控制机理,他们发现凹坑开口处的流动分离改变了凹坑外部涡量耗散过程,从而诱导雷诺应力发生变化,实现减阻。本文将在 NACA0009 水翼端面布置这种仿生结构,研究其对叶顶泄漏流中涡结构的控制效果。

2 控制模型与计算方法

本研究中所用的控制模型如图 1 所示,在 NACA0009 水翼端面排布仿生球形凹坑,翼型的弦长为 c ,凹坑的深宽比为 0.5,凹坑深度为 $c/80$ 。计算域的大小为 $4c \times c \times 2c$,水翼展向长度为 $0.9c$,这样叶顶间隙 τ 等于 $0.1c$ 。由于采用八叉树形式的网格划分,在翼型表面采用 9 层网格,使得翼型近壁网格尺寸为 $c/2^9$ 。控制方程如方程 1 所示,采用投影法和多重网格法求解泊松方程。采用二阶 Bell-Colella-Glaz 格式进行对流项离散,采用隐式 Crank-Nicholson 方法进行扩散项离散,这样可保证时空离散都具有二阶精度。由于主要关注叶顶泄漏流中的涡结构在控制前后的变化,不作流场统计分析,所以计算中八叉树网格进行自适应分层与重新划分,本文根据流场局部涡量范数小于 0.01 进行网格自适应划分,最大网格层数为 7 层,最小为 5 层。

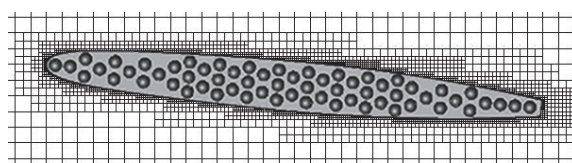


图 1 仿生水翼端面与层次结构化网格划分

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1b)$$

图 2 展示采用本文计算程序得到的计算结果与实验对比。文献[17]表明 NACA0009 水翼在梢间隙为 $0.1c$ 时,叶顶泄漏流中流场涡结构分布相似。为了验证本研究数值计算方法的可靠性,对比了雷诺数 $Re=1 \times 10^6$ 、攻角 $\alpha=10^\circ$ 、叶顶间隙 $\tau/c=0.1$ 工况下非空化数值计算结果与空化实验结果^[18](图 2)。由于叶顶泄漏流中主要以流向涡为主,因此图中数值计算结

果中采用流向涡表示叶顶泄漏涡的轨迹。可以看到,通过本研究数值计算方法得到的叶顶泄漏涡轨迹与实验结果吻合得较好,这表明了本文数值计算方法的可靠性。

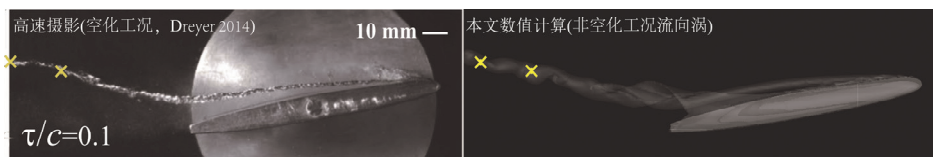


图2 实验拍摄空化的涡结构^[18]与本文数值计算得到的涡结构

3 结果与讨论

当流场达到统计平均后,叶顶泄漏流中涡结构分布特性变化较小,因此在下面的分析对比中,我们对比无量纲时间 20 时控制前后流场特性。图3展示了控制前后泄漏流中流向涡结构等值面以及流向截面内压力分布。流向涡量值为-30,压力云图中取值范围为-0.4~0,截去了大于-0.08的部分。可以看到,控制前叶顶泄漏流中存在典型的分离涡、二次涡和泄漏涡,分离涡从端面前缘处开始形成,而二次涡和分离涡均在前缘下游位置形成。分离涡与泄漏涡在翼型尾缘处发生融合,然后向下游演化,尾迹中涡中心压力较低。当在翼型端面布置仿生球形凹坑后,泄漏区分离涡发射破碎,吸力面侧难以形成规则的泄漏涡,并且翼型尾缘处分离涡和泄漏涡的融合被抑制。不难看出控制后尾迹中涡强度减小,且涡中心的负压值降低,这也间接表明在翼型端面布置仿生球形凹坑可以抑制空化。

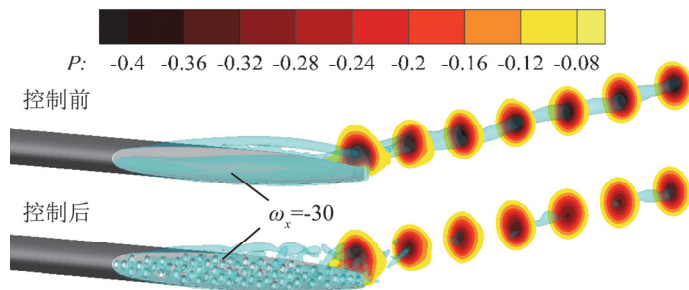


图3 控制前后泄漏流中压力和涡结构分布

图4展示了控制前后泄漏流中流向速度 $U=0.5$ 、法向速度 $V=0.6$ 以及展向速度 $W=0.4$ 的等值区域。可以看到,控制前泄漏流场中流向速度较小,主要是法向速度,且法向速度主要存在于翼型尾部区域,这是由于泄漏涡的产生使得流道发生阻塞,使得流向速度降低。同时,随着分离涡向下游演化,其强度逐渐增加,并在尾缘处与泄漏涡发生融合,使得法向速度增加。当在翼型端面布置仿生球形凹坑后,泄漏流中分离涡、泄漏涡的形成被抑制,流向速度增加而法向速度减小。可以看到,翼型尾缘处以及尾迹中的法向速度和展向速度较控制前明显减小,这表明泄漏涡和分离涡的融合受到抑制,使得尾迹中的流向涡强度在控制后明显降低。

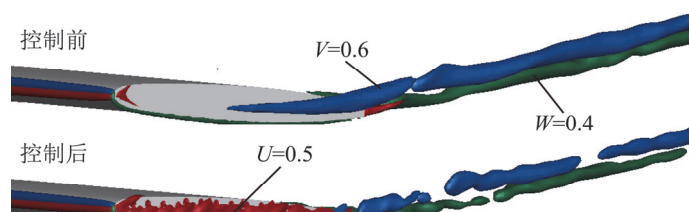


图4 控制前后泄漏流中速度等值面

图5展示了控制前后翼型三方向的受力系数，翼型受力系数计算公式为：

$$\begin{bmatrix} C_{fx} \\ C_{fy} \\ C_{fz} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} ds / \rho U_\infty^2 A \quad (2)$$

其中 A 是翼型的表面积， ρ 为流体密度， U_∞ 是来流速度。从图5中的曲线变化可以看到翼型受到的升阻力均增加，而法向受力减小，这是因为控制后泄漏流中流向速度增加，从而翼型端面受到的阻力较控制前增加。由于分离涡受到一定抑制，从而翼型端面受到的法向摩擦阻力减小，同时泄漏区负压值降低，使得翼型受到的升力增加而法向阻力减小。

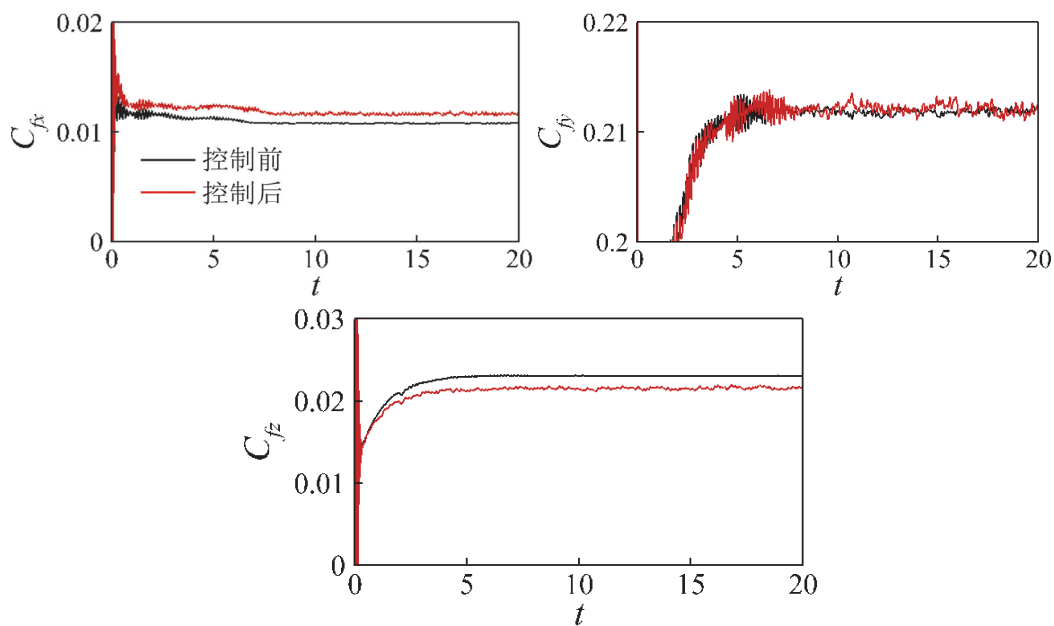


图5 控制前后翼型三方向受力系数

4 结论与展望

通过以上对比分析，我们可以发现在雷诺数 $Re=1 \times 10^6$ 、攻角 $\alpha=5^\circ$ 、叶顶间隙 $\tau/c=0.1$

时,在 NACA0009 水翼端面布置仿生球形凹坑后,叶顶泄漏流中涡结构得到有效抑制,同时涡强度降低且涡中心的负压值减小。控制后,由于泄漏区流向速度增加,使得翼型受到的流向阻力增加,但流动损失减小,且升力同时增加而展向阻力减小,总的来说翼型的力学性能得到提高。本文讨论的工况和控制参数较单一,我们将在进一步的研究中探讨不同流动工况以及不同控制参数下仿生球形凹坑结构对叶顶泄漏流的控制效果。

参考文献

- 1 李应红, 吴云, 张海灯, 等. 等离子体激励式压气机[J]. 推进技术, 2017(10): 9-16.
- 2 Li J, Du J, Nie C, et al. Review of tip air injection to improve stall margin in axial compressors[J]. Progress in Aerospace Sciences, 2019, 106: 15-31.
- 3 Zhang B, Liu B, Liu P, et al. Impact of Boundary Layer Suction on Clearance Leakage Flow in a Cantilever Stator of Transonic Compressor[J]. Journal of Applied Fluid Mechanics, 2020, 13(2): 443-455.
- 4 Liu Y, Tan L. Method of C groove on vortex suppression and energy performance improvement for a NACA0009 hydrofoil with tip clearance in tidal energy[J]. Energy, 2018, 155: 448-461.
- 5 Fei Z, Zhang R, Xu H, et al. Numerical analysis of the groove effect on the tip leakage vortex cavitating flow[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy, 2019: 0957650919884192.
- 6 Lei T, Zhifeng X, Yabin L, et al. Influence of T-shape tip clearance on performance of a mixed-flow pump[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of power and energy, 2018, 232(4): 386-396.
- 7 Zhou C, Hodson H, Tibbott I, et al. Effects of winglet geometry on the aerodynamic performance of tip leakage flow in a turbine cascade[J]. Journal of turbomachinery, 2013, 135(5): 051009.
- 8 Guo Q, Zhou L, Wang Z. Numerical evaluation of the clearance geometries effect on the flow field and performance of a hydrofoil[J]. Renewable Energy, 2016, 99: 390-397.
- 9 付云峰, 宋彦萍, 陈聪, 等. 叶顶布置蜂窝的涡轮平面叶栅间隙泄漏流动研究[J]. 工程热物理学报, 2017, 38(1): 70-75.
- 10 付云峰, 孟睿, 俞建阳, 等. 球底蜂窝组合叶顶对涡轮叶尖泄漏流动的控制[J]. 工程热物理学报, 2018, 39(11): 2382-2388.
- 11 Wang Y, Yu J, Song Y, et al. Parameter optimization of the composite honeycomb tip in a turbine cascade[J]. Energy, 2020, 147: 117236.
- 12 程红, 孙久荣, 李连桥, 等. 臭蜣螂体壁体表结构及其与减粘脱附发关系[J]. 昆虫学报, 2002, 45(2): 175-181.
- 13 张成春, 任露泉, 王晶, 等. 旋成体仿生凹坑表面流场控制减阻仿真分析[J]. 兵工学报, 2009, 30(8): 1066-1072.

- 14 Van Nesselrooij M, Veldhuis L L M, Van Oudheusden B W, et al. Drag reduction by means of dimpled surfaces in turbulent boundary layers[J]. Experiments in Fluids, 2016, 57(9): 142.
- 15 Tay C M, Chew Y T, Khoo B C, et al. Development of flow structures over dimples[J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 2014, 52:278-287.
- 16 Ng J H, Jaiman R K, Lim T T, et al. Geometric Effects of Shallow Dimples in Turbulent Channel Flows at $Re_\tau \approx 180$: A Vorticity Transport Perspective[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2020. (published online)
- 17 Cheng H Y, Long X P, Ji B, et al. LES investigation of the influence of cavitation on flow patterns in a confined tip-leakage flow [J]. Ocean Engineering, 2019, 186: 106115.
- 18 Dreyer M, Decaix J., Münch-Alligné C, et al. Mind the gap: a new insight into the tip leakage vortex using stereo-PIV[J]. Experiments in Fluids, 2014, 55: 1849.

Numerical investigations of the vortex suppression in the tip leakage flow of a hydrofoil via bionic geometries

HUANG Ya-dong, ZHANG De-sheng, LI Ya-jie, GU Fa-dong

(National Research Center of Pumps and Pumping System Engineering and Technology,
Jiangsu University, Zhenjiang, 212013. Email: ydhuang@ujs.edu.cn)

Abstract: Noise, vibration, flow block and loss induced by the unstable vortical structures in the tip-leakage flow could restrict the comprehensive performance improvements of the turbomachinery. The bionic sphere dimples are applied on the tip wall of the NACA0009 hydrofoil to suppress the vortices in the tip-leakage flow at the Reynolds number $Re=1 \times 10^6$, the attack angle $\alpha=5^\circ$ and the tip clearance $\tau/c=0.1$ (c is the chord length of the hydrofoil). Numerical investigations of the control effects are conducted by the finite volume method based on the hierarchical structured mesh. The results show that both the separation vortices and the tip-leakage vortices are hardly formed under control, and the fusion of the two kinds of vortices at the tail edge of the hydrofoil are suppressed. It is found that the negative pressure value in the wake vortex core take reductions under control. That the streamwise velocity increases while velocities in other directions reduce means the flow loss is decreased under control. Moreover, both the drag and the lift increase due to the flow block is suppressed, meanwhile the spanwise force achieves reductions under control. All results illustrate the bionic sphere dimples could suppress the vortices in the tip-leakage flow and improve the dynamic behavior of the hydrofoil.

Key words: NACA0009 hydrofoil; tip-leakage flow; bionic sphere dimple; vortex suppression

关于平板边界层时平均壁面垂向速度 壁面律的讨论

丁一鸣, 王铎, 曹博超, 徐弘一

复旦大学, 航空航天系, 上海, 200433, Email: Hongyi_Xu@fudan.edu.cn

摘要: 本文对壁面切应力为流向坐标函数的平板湍流边界层, 采用时-空间平均摩擦速度为尺度, 设计构造了反映垂向速度边界层特征的相关指示函数 (Indicator Function, IDF), 并通过指示函数对垂向速度边界层中各个亚层进行了严格定量划分。文章在此基础上给出了不依赖于雷诺数的类-1 湍流边界层的三控制参数壁面垂向速度规律的解析表达, 并对其中的控制参数进行了物理剖析, 验证了相关控制参数对边界层壁面垂向时均速度描述的准确性和有效性, 为进一步构建完整湍流速度边界层的普适数学表达奠定了基础。

关键词: 类-1 湍流边界层; 零压梯度半无限平板; 壁面律; 平壁解析律; 直接数值模拟

1 引言

半无限长平板零压力梯度流动作为类-1 湍流边界层的一种, 具有沿流动空间方向可无限发展的特点, 时均壁面切应力 τ_w 以及相关摩擦速度 u_τ 均为流向坐标 (x) 的函数。历史上, Prandtl^[1] 和 von Karman^[2] 也是基于了半无限大平板流的研究而抽象出了边界层概念和壁面律。边界层可定性描述为壁面附近速度剧烈变化薄层区域内的流动现象。von Karman 在对半无限长平板流动构型的研究中发现了流向速度剖面不依赖于雷诺数的分布规律, 即式 (1) 所表述的湍流壁面律。

$$u^* = \begin{cases} y^*, & y^* < \sigma_i \\ 1/\kappa \ln(y^*) + C, & y^* \geq \sigma_i \end{cases} \quad (1)$$

2 湍流边界层速度尺度和普适控制方程

首先定义时-空间平均摩擦速度 $\overline{u_\tau}$, 是由壁面切应力 τ_w 沿流动方向的平均值所确定的

特征速度，计算公式为：

$$\overline{u_\tau} = \sqrt{\overline{\tau_w} / \rho}, \quad \overline{\tau_w} = \int_{l_1}^{l_2} \tau_w(x) dx / (l_2 - l_1) \quad (2)$$

其中 $[l_1, l_2]$ 视研究所考察的范围而定，在本文中， $[l_1, l_2]$ 为湍流充分发展区域，即雷诺数从 670~4060 的区间，因此使研究结果在区间内具有普适性。而基于更加精确的 DNS 统计数据，可使得零压梯度半无限大平板流的时均垂向速度边界层得以精确描述，为更好地分析 DNS 数据，采用时-空间摩擦速度为尺度所无量纲化后的控制方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u^+ u^+}}{\partial x^+} + \frac{\partial \overline{u^+ v^+}}{\partial y^+} = \frac{\partial^2 \overline{u^+}}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \overline{u^+}}{\partial y^{+2}} - \left(\frac{\partial \overline{u'^+ v'^+}}{\partial x^+} + \frac{\partial \overline{u'^+ v'^+}}{\partial y^+} \right) \\ \frac{\partial \overline{u^+ v^+}}{\partial x^+} + \frac{\partial \overline{v^+ v^+}}{\partial y^+} = -\frac{\partial \overline{p^+}}{\partial y^+} + \frac{\partial^2 \overline{v^+}}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2 \overline{v^+}}{\partial y^{+2}} - \left(\frac{\partial \overline{u'^+ v'^+}}{\partial x^+} + \frac{\partial \overline{v'^+ v'^+}}{\partial y^+} \right) \end{cases} \quad (3)$$

由此得到不再含有雷诺数或其他流体力学中常见的流动准则数的无量纲方程^[3-5]。

3 平板垂向速度湍流边界层指示函数设计

在对流向速度边界层的研究中，通常引入指示函数（Indicator Function, IDF）对边界层内部进行定量分层，其公式为 $IDF = \partial u / \partial \ln(y)$ 。指示函数可以用于定量地确定出边界层内部内层、过渡层和半对数层的边界。当指示函数的分布为水平线区域，则对应式（1）由半对数律所控制，而分布为直线的区域则由线性律所控制。本文构造了两个新型 IDF 函数，即公式（4）来对 v 的边界层内部进行定量划分，其中采用时-空间平均摩擦尺度 $(\overline{u_\tau}, \overline{l_\tau})$ 时，公式中上标为 $\# = +$ ；采用时均局部摩擦尺度 (u_τ, l_τ) 时，公式中上标为 $\# = *$ 。

$$IDF1(y^\#) = \frac{y^\# \partial v^\#}{v^\# \partial y^\#} = \frac{\partial \ln(v^\#)}{\partial \ln(y^\#)} \quad IDF2(y^\#) = \frac{y^\# \partial v^\#}{\partial y^\#} = \frac{\partial v^\#}{\partial \ln(y^\#)} \quad (4)$$

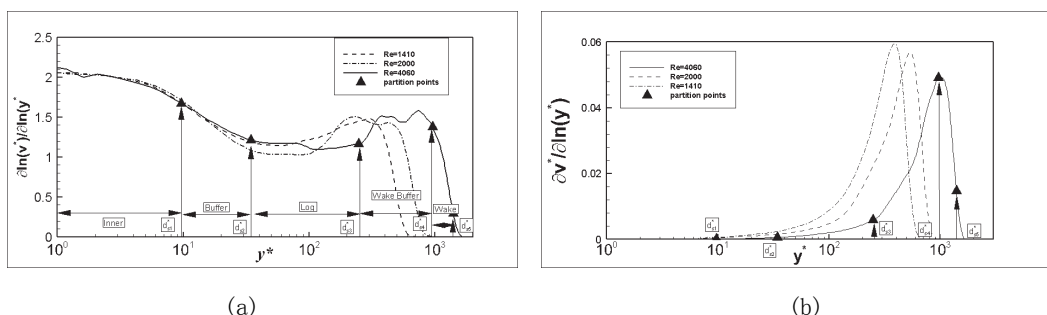


图 1(a) 半对数坐标系下的基于时-空间平均摩擦速度尺度的 IDF1，以及垂向速度边界层内部特征点；
(b) 半对数坐标系下的基于时-空间平均摩擦速度尺度的 IDF2 以及时垂向速度边界层内部特征点

根据指示函数所得到的特征点 $d_{sm}^\# (m=1,2,3,4,5)$, 可将 v 边界层剖面划分为 5 个部分, 分别为内层, 过渡层, 双对数线性层, 尾迹过渡层, 尾迹层。从 IDF1 得到 3 个特征点, 分别为 $d_{s1}^\#, d_{s2}^\#, d_{s3}^\#$ 。其中 $d_{s1}^\#$ 为 IDF1 分布的转变点, 即 $\partial \text{IDF1}(y^\#) / \partial \ln(y^\#)$ 在 $d_{s1}^\#$ 处有一极小值, 而 $d_{s2}^\#$ 与 $d_{s3}^\#$ 为斜率为零的两个特征点, 两点之间为双对数线性层。 $d_{s3}^\#$ 可以通过 IDF2 进一步细分为尾迹过渡层与尾迹层, 两者的边界为 $d_{s4}^\#$, 即 IDF2 极大值时 $y^\#$ 的取值。

4 平板湍流边界层垂向速度近似解析表达

在上一节中, 通过引入两个垂向速度指示函数将垂向速度边界层内部分成了五个部分, 基于上述分析以及传统流向边界层壁面律的研究^[5-9], 本文假设垂向速度边界层中同样存在与流向速度边界层中相同的抑制效应, 引入了表征这一效应的两个重要参数 $(\epsilon_i^\#, D_i^\#)$, $\epsilon_i^\# (i=1,2,3)$ 表示抑制作用的强度, $D_i^\# (i=1,2,3)$ 表示抑制作用的特征长度。提出以下解析表达式, 对 Örlü 等^[10-13]所提供的平板流动 DNS 数据, 进行垂向速度 v 的解析表达和预测:

内层及其过渡层

$$\ln[v^\#(y^\#)] = \ln[v^\#(d_{s2}^\#)] + \ln(y^\# / d_{s2}^\#) \left\{ 1/\kappa_1^\# - \epsilon_1^\#(x^\#) \left[1 - e^{-\ln(y^\# / d_{s2}^\#) / D_1^\#(x^\#)} \right] \right\}, y^\# < d_{s2}^\# \quad (5)$$

双对数线性层

$$\ln[v^\#(y^\#)] = 1/\kappa_1^\# \ln(y^\#) + C^\#, d_{s2}^\# \leq y^\# < d_{s3}^\# \quad (6)$$

尾迹过渡层

$$v^\#(y^\#) = v^\#(d_{s3}^\#) + \ln(y^\# / d_{s3}^\#) \left\{ 1/\kappa_2^\# - \epsilon_2^\#(x^\#) \left[1 - e^{-\ln(y^\# / d_{s3}^\#) / D_2^\#(x^\#)} \right] \right\}, d_{s3}^\# \leq y^\# < d_{s4}^\# \quad (7)$$

尾迹层

$$v^\#(y^\#) = v^\#(d_{s5}^\#) + \ln(y^\# / d_{s5}^\#) \left\{ 1/\kappa_2^\# - \epsilon_3^\#(x^\#) \left[1 - e^{-\ln(y^\# / d_{s5}^\#) / D_3^\#(x^\#)} \right] \right\}, d_{s4}^\# \leq y^\# < d_{s5}^\# \quad (8)$$

上述公式均为三控制参数方程。公式中 $\kappa_1^\#$ 为控制对数层斜率的倒数, $\kappa_2^\#$ 为 $\kappa_1^\#$ 与速度 v 的乘积。参数 $(\epsilon_i^\#, D_i^\#)$ 的计算需要利用精确的 DNS 数据而标定得到, 本文通过特征点处的垂向速度值和其一阶导数值, 带入上述公式中进而得到以上控制参数, 从而进行完成预

测模型构建。通过上述过程，可以精确拟合出垂向速度剖面并保证速度和速度一阶导数的连续性。拟合结果如图 2，与 DNS 数据相比，速度的相对误差均可控制在 5% 之内。

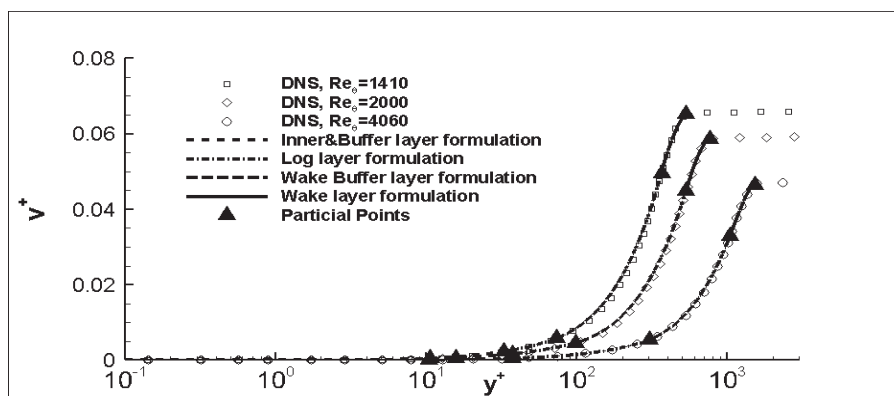


图 2 以时-空间平均摩擦速度为尺度的边界层 DNS 速度剖面

5 总结

基于零压梯度平板湍流的 DNS 数据，本文对垂向速度边界层进行深度分析，构建出表征其特征的指示函数，并由此发现和定义了其内部各亚层的分界点。应用流向速度边界层的分析思路，得到了边界层垂向速度剖线的普适解析规律，并对该规律中的控制参数进行了分析。

参考文献

- 1 Prandtl L., Uber die ausgebildete turbulenz, Verh. 2nd Intl. Kong. Fur Tech. Mech., Zurich, 1926[English translation NACA Tech. Memo. 435, 62]
- 2 von Karman T., Mechanical similitude and turbulence[J]. Technical Report Archive & Image Library, 1931.
- 3 Direct numerical simulation of turbulence in square and rectangular annular ducts: Part-I mean flow analyses, Re-understanding fully-developed turbulent boundary layer in duct. Scientia Sinica(Physica, Mechanica & Astronomica), 2013, 43(5):634-651.
- 4 Xu H., Direct numerical simulation of turbulence in a square annular duct[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2009, 621(621):23-57.
- 5 Cao B., Xu H., Re-understanding the law-of-the-wall for wall-bounded turbulence based on in-depth investigation of DNS data[J]. Acta Mechanica Sinica, 2018:1-19.
- 6 Xu H. and Cao B. Research on the near-wall streamwise velocity of fully-developed turbulence in generic straight duct: re-understanding the von Karman Law-of-the-Wall relations In NCFM9 :19
- 7 Fu Y., Wang D., Cao B., Xu H., Reynolds-number independent inner-layer analytical formulation for type-A turbulent boundary layer based on DNS data, SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & AstroAstronomica, 49(8), 2019.

- 8 Wang D., Li H., Yu T., Li Y., Xu H., Direct numerical simulation and in-depth analysis of thermal turbulence in square annular duct, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 144(2019) 118590.
- 9 Wang D., Li H., Yu T., Li Y., Xu H., Law-of-the-wall analytical formulations for Type-A turbulent boundary layers, *Journal of Hydrodynamics*, 2020 32(2):296-313.
- 10 Schlatter P., Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, 659(4):116-126.
- 11 Schlatter P., Örlü R., Li Q. et al., Turbulent boundary layers up to $Re_\theta=2500$ studied through simulation and experiment[J]. *Physics of Fluids*, 2009, 21(5):1.
- 12 Schlatter P., Li Q., Brethouwer G., et al. Simulations of spatially evolving turbulent boundary layers up to $Re_\theta=4300$ [J]. *International Journal of Heat & Fluid Flow*, 2010, 31(3):251-261.
- 13 EitelAmor G., Örlü R.. Simulation and validation of a spatially evolving turbulent boundary layer up to $Re_\theta=8300$ [J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2014, 47:57-69.

Discussion about the law-of-wall for vertical velocity of the flat-plate boundary layer

DING Yi-ming, WANG Duo, CAO Bo-chao, XU Hong-yi

(Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, Shanghai, 200433, China.

E-mail: Hongyi_Xu@fudan.edu.cn)

Abstract: This paper makes use of the time-space averaged friction velocity as the scale to design the indicator function for the vertical velocity in the turbulent boundary layer and to accurately reflect its boundary-layer characters. Based on the indicator function, a quantitative partition of the boundary layer is provided and an analytical expression with three parameters is constructed for the vertical velocity component in the Type-A turbulent boundary layer. The paper analysed the control parameters in the analytical expression, such as the characteristic damping length D and the damping strength of ϵ , and verified the accuracy and effectiveness of these control parameters for the prediction of vertical velocity.

Key words: Type-A turbulent boundary layer, Semi-finite zero-pressure gradient flat-plate, Direct numerical simulation, Law-of-the-wall

多颗粒在 Giesekus 流体 Poiseuille 流场中的异常迁移

刘炳瑞, 林建忠

(浙江大学航空航天学院流体所, 流体动力与机电系统国家重点实验室, 杭州 310027,

Email: brliu@zju.edu.cn)

摘要: 本文采用虚拟区域法对多个颗粒在黏弹性流体 Poiseuille 流场中的侧向迁移进行了数值模拟。在数值模拟结果的基础上, 比较了单颗粒与多颗粒运动的差异, 分析了在不同流变性质的流体中颗粒运动的轨迹与趋势。研究表明, 由于颗粒间相互作用的影响, 多颗粒的运动轨迹与方向与单颗粒情形有着较大差异; 在流道中心线与壁面之间存在一条分界线, 当颗粒的初始位置位于分界线与中心线之间时, 颗粒最终将运动至中心线, 反之则运动到壁面; 在同样的条件下, 单颗粒朝中心线运动, 而多颗粒则会朝向壁面运动, 且这种现象随着颗粒间距离的减小而增强。

关键词: 颗粒间作用; 颗粒迁移; Giesekus 流体; Poiseuille 流; 虚拟区域法

1 引言

实际应用中多颗粒运动现象普遍, 对多颗粒在黏弹性流场的运动规律的研究十分必要。相邻颗粒的相对运动会引起颗粒间的相互水动力作用, 而这种作用又会影响颗粒的迁移。以双颗粒在黏弹性剪切流中的运动为例, Hwang 等数值模拟了在 Oldroyd-B 流体简单剪切流中的颗粒迁移^[1], 结果表明相邻的两颗粒在牛顿剪切流中会出现 kissing-tumbling-separation 现象, 而在 Oldroyd-B 剪切流中两颗粒则只呈现 tumbling 现象。Yoon 等聚焦两颗粒在有界 Oldroyd-B 剪切流中的运动^[2], 发现颗粒间相互作用导致了颗粒的不同运动, 即 pass, return 和 tumble。Liu 等研究两个球形颗粒在 Giesekus 流体剪切流中的运动^[3], 发现颗粒存在两种运动行为, 即 pass 和 return, 而 tumble 并没有在 Giesekus 流体中出现, 该结果与其他数值模拟^[4]和实验结果^[5]相吻合, 说明流体的流变特性对颗粒的迁移特性有影响。

本文通过数值模拟着重研究在不同条件下 3 个相同颗粒在黏弹性 Poiseuille 流场中的运动。与以往的研究工作^[6,7]相比, 本文侧重于研究颗粒间的水动力相互作用对颗粒轨迹的影响, 主要探讨流体 Weissenberg 数(Wi)、颗粒的初始间距 s 对于颗粒迁移时的方向、轨迹的作用。

基金项目: 国家自然科学基金(11632016)

2 数值计算

2.1 虚拟区域法

本文采用直接力虚拟区域法 (DF-FD) 模拟颗粒的迁移。直接力虚拟区域法是早期分布式拉格朗日乘子虚拟区域法(DLM/FD)^[8-10]的改进版, 分布式拉格朗日乘子虚拟区域法(DLM/FD)最早由 Glowinski 等人^[11]提出用来求解微分方程。有关直接力虚拟区域法的具体内容可参考^[12]。

2.2 计算设置

如图 1 所示, 笛卡尔坐标系的中心设置在管道入口处, 管道高度与长度为 H 和 L , 计算域在 x 轴和 y 轴上分别为 $[0, L]$, $[-H/2, H/2]$ 。所有颗粒初始位于中线的上侧且颗粒的中心坐标为 y_0 , 相邻颗粒的初始间距为 s 。在流动方向采用周期性边界条件, 在管道壁面和颗粒表面采用无滑移边界条件。管道高度 H 和管道中心线处的最大速度 U_0 作为特征长度和特征速度。阻塞比 ε 定义为 $\varepsilon = d_p/H$ (d_p 为颗粒直径)。为平衡计算效率和计算精度, 取 $L=16H$, 网格大小设置为 $1/128$, 时间步长为 5×10^{-4} 。

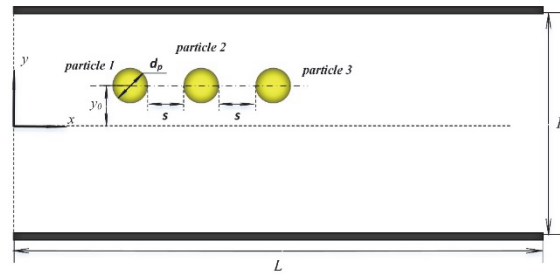


图 1 计算域及颗粒初始分布示意图

3 结果讨论

3.1 异常侧向迁移

本文主要研究由于颗粒间水动力相互作用所导致的异常侧向迁移。图 2 给出了相同条件下单颗粒的迁移轨迹和 3 颗粒中每个颗粒的迁移轨迹, 计算参数设置为 $Wi=0.5$, $Re=0.1$, $\varepsilon=0.3$, $y_0=0.2$, $s=0.5$ 。可见所有颗粒均向中心轴线运动, 但是单颗粒的运动轨迹与 3 颗粒中的每个颗粒运动轨迹并不重合, 3 颗粒中的颗粒 1 在迁移的初始阶段朝壁面运动一段距离 Δm (颗粒运动轨迹最高点与颗粒初始位置的垂直高度) 后朝中心线运动; 而颗粒间的相互作用使得颗粒 3 朝中心线运动。基于单颗粒的运动轨迹, 可以将 3 颗粒运动至颗粒初始高度的一半 ($y_0/2$) 时, 颗粒 1、颗粒 2 和颗粒 3 与单颗粒的运动轨迹在 x 方向上的差值表示为 Δn , Δg 和 Δk 。比较这 3 个差值, 可见颗粒 1 与单颗粒的差值 Δn 最大, 处在中间位置的颗

粒 2 与单颗粒的差值 Δg 最小。

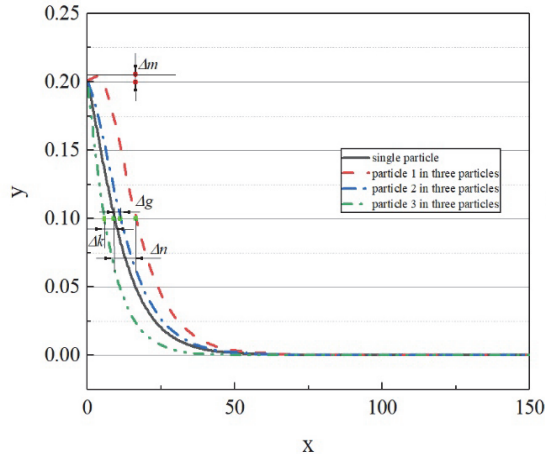


图 2 单颗粒与 3 颗粒运动轨迹的比较

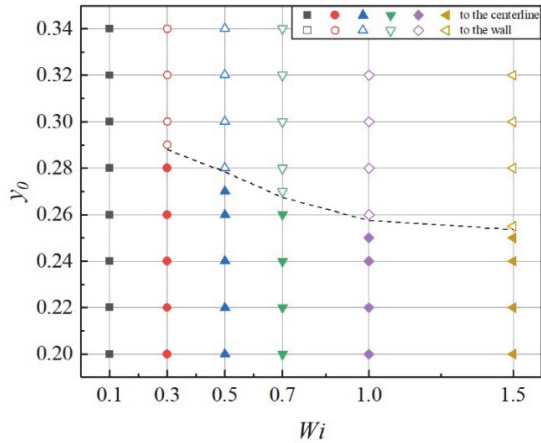
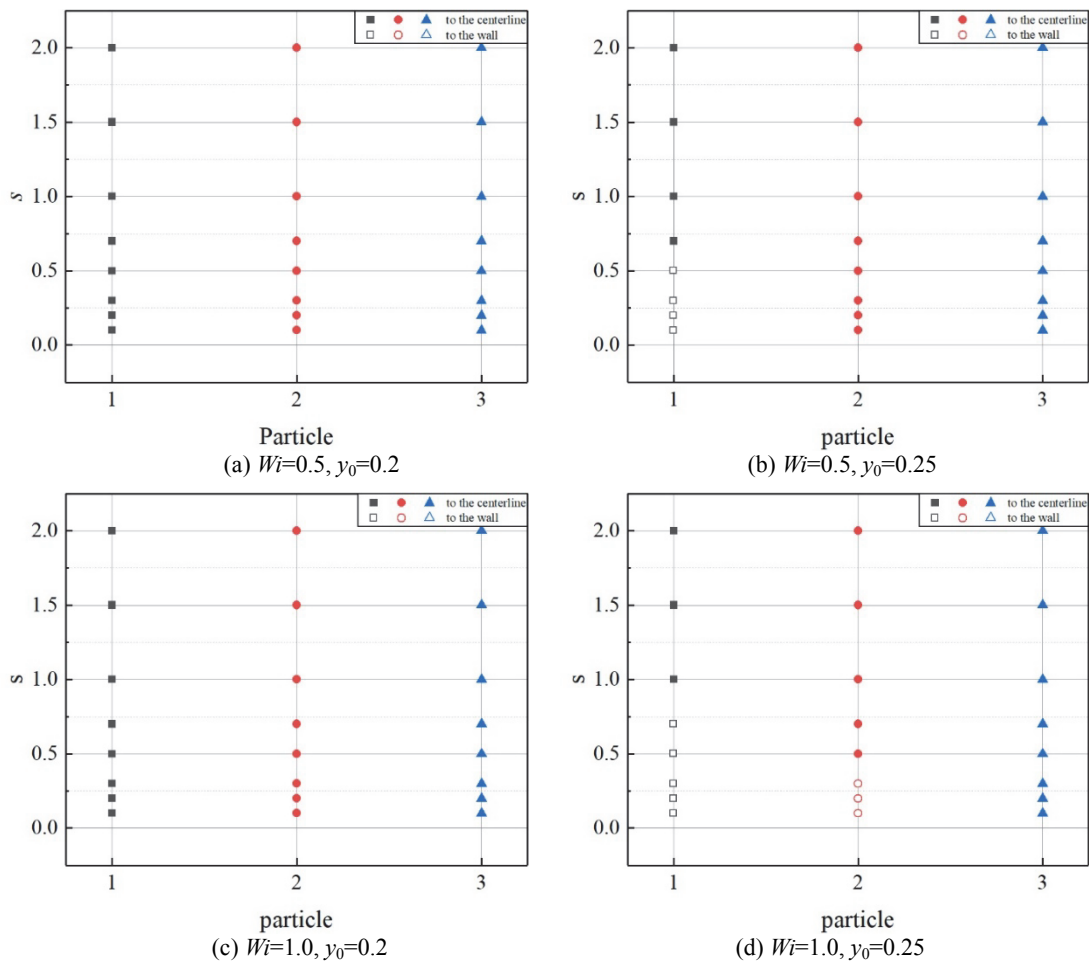


图 3 不同 Wi 和 y_0 时单颗粒的运动方向

颗粒间水动力相互作用导致的颗粒异常侧向迁移会引起颗粒运动方向的改变，而这种改变与诸多因素有关。在流场中存在一条分界线，该线将颗粒的运动方向分为朝壁面运动和朝中心线运动^[13-18]。分界线的位置受到 Weissenberg 数、剪切变稀特性、阻塞比以及其他因素的影响。图 3 给出了在不同 Weissenberg 数和不同颗粒初始位置 y_0 情况下颗粒的运动方向，图中的实心符号和空心符号分别表示颗粒的迁移朝中线和壁面方向，虚线表示分界线。由图可见，随着 Wi 数的增大，分界线下移，即颗粒往壁面的可能性增大，这一结论与以往的研究结果吻合^[16]。

3.2 Weissenberg 数和颗粒初始位置对颗粒运动方向的影响

图 4 给出了不同 Wi 、 y_0 和 s 情况下颗粒 1、颗粒 2 和颗粒 3 的运动方向，可见颗粒 1 和颗粒 2 在某些情况下的运动方向与单颗粒不同。在图 3 中，单颗粒在 $Wi=0.5$ 、 $y_0=0.25$ 和 $Wi=1.0$ 、 $y_0=0.25$ 的条件下朝中心线运动，而在图 4 的相同条件下，当颗粒间距较小时，颗粒 1 和颗粒 2 则朝壁面运动。这一现象的原因是由于颗粒间的相互作用导致颗粒异常向上迁移，当颗粒的初始垂直高度 y_0 与异常向上迁移量 Δm 的叠加大于颗粒迁移方向分界线的临界值即 $\Delta m + y_0 > i$ 时，原本朝中心线运动的颗粒最终改变方向而朝壁面运动。比较图 4 的 4 个算例可知，颗粒异常向上迁移不仅与流体的流变性质和颗粒的初始间距有关，并且还与颗粒初始位置与分界线的距离有关。

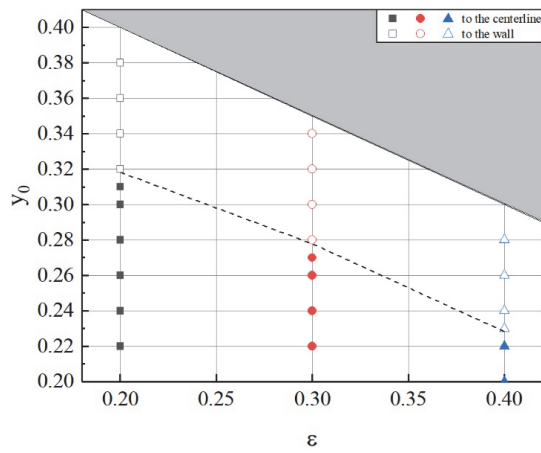
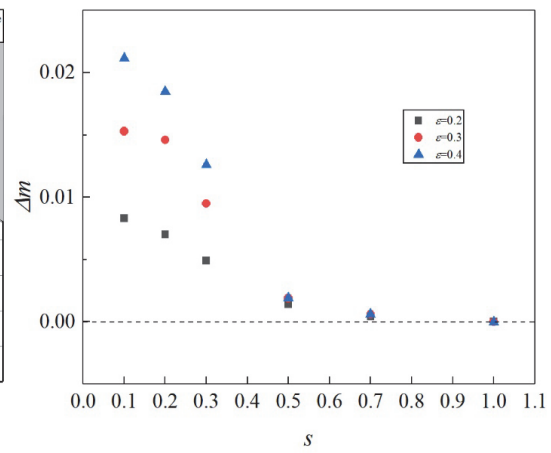
图4 不同 Wi 、 y_0 和 s 下颗粒的运动方向

3.3 阻塞比对颗粒运动的影响

图5和图6分别给出了阻塞比 ε 对颗粒运动方向 Δm 的影响, 其中图5的阴影部分表示颗粒不可能到达的区域。可见随着 ε 的增加, 颗粒更有可能朝壁面方向迁移, 当 $\varepsilon=0.2$ 时, $y_0 \leq 0.31$ 处的颗粒将运动到中线, 而 $\varepsilon=0.4$ 时, 只有 $y_0 \leq 0.22$ 处的颗粒将运动到中线。图6中, Δm 的值随着 ε 的增加而增加, 可见随着 ε 的增加, 颗粒的异常迁移现象更加明显。

4 结论

当颗粒在 Giesekus 流体 Poiseuille 流场中释放时, 颗粒迁移到中线或壁面取决于若干因素, 随着流体弹性效应、剪切变稀效应和阻塞比的增加, 颗粒更易往壁面迁移。多颗粒的运动因颗粒的相互作用而产生与单颗粒时不同的异常迁移, 该现象随着剪切变稀效应和阻塞比的增加以及弹性效应的减弱而变得明显。

图5 不同 ε 和 y_0 时单颗粒的运动方向图6 不同 ε 和 s 时的 Δm 值

参考文献

- 1 W.R. Hwang, M.A. Hulsen, H.E.H. Meijer. Direct simulations of particle suspensions in a viscoelastic fluid in sliding bi-periodic frames, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 121 (2004) 15–33.
- 2 S. Yoon, M.A. Walkley, O.G. Harlen. Two particle interactions in a confined viscoelastic fluid under shear, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 185-186 (2012) 39–48.
- 3 B. R. Liu, J. Z. Lin, X. K. Ku, et al. Particle migration in bounded shear flow of Giesekus fluids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 276 (2020) 104233.
- 4 Y. Choi, M.A. Hulsen, H.E.H. Meijer. An extended finite element method for the simulation of particulate viscoelastic flows, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 (2010) 607–624.
- 5 F. Snijkers, R. Pasquino, J. Vermant. Hydrodynamic interactions between two equally sized spheres in viscoelastic fluids in shear flow, Langmuir 29 (2013) 5701–5713.
- 6 G. D'Avino, M.A. Hulsen, P.L. Maffettone. Dynamics of pairs and triplets of particles in a viscoelastic fluid flowing in a cylindrical channel, Comput. Fluids. 86 (2013) 45–55.
- 7 F. Del Giudice, G. D'Avino, F. Greco, et al. Fluid viscoelasticity drives self-assembly of particle trains in a straight microfluidic channel, Phys. Rev. Appl. 10(6) (2018) 064058.
- 8 Z. Yu, N. Phan-Thien, Y.R. Fan, et al. Viscoelastic mobility problem of a system of particles, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 104 (2002) 87–124.
- 9 Z. Yu, A. Wachs, Y. Peysson. Numerical simulation of particle sedimentation in shear-thinning fluids with a fictitious domain method, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 136 (2006) 126–139.
- 10 Z. Yu, A. Wachs. A fictitious domain method for dynamic simulation of particle sedimentation in Bingham fluids, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 145 (2007) 78–91.

- 11 R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, et al. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, *Int. J. Multiphase Flow* 25 (1999) 755–794.
- 12 Z. Yu, X. Shao. A direct-forcing fictitious domain method for particulate flows, *J. Comput. Phys.* 227 (2007) 292–314.
- 13 A. Karnis, S.G. Mason. Particle motions in sheared suspensions. xix. viscoelastic media, *Trans. Soc. Rheol.* 10 (1966) 571–592.
- 14 Ho, B. P., Leal, L. G. Migration of rigid spheres in a two-dimensional unidirectional shear flow of a second-order fluid, *J. Fluid Mech.* 76 (1976) 783–799.
- 15 Dhahir, S. A., Walters, K. On non-Newtonian flow past a cylinder in a confined flow, *J. Rheol.* 33 (1989) 781–804.
- 16 P.Y. Huang, J. Feng, H.H. Hu, D.D. Joseph, Direct simulation of the motion of solid particles in Couette and Poiseuille flows of viscoelastic fluids, *J. Fluid Mech.* 343 (1997) 73–94.
- 17 M.M. Villone, G. D’Avino, M.A. Hulsen, et al. Maffettone, Numerical simulations of particle migration in a viscoelastic fluid subjected to Poiseuille flow, *Comput. Fluids* 42 (2011) 82–91.
- 18 M.M. Villone, G. D’Avino, M.A. Hulsen, et al. Maffettone, Simulations of viscoelasticity-induced focusing of particles in pressure-driven micro-slit flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 166 (2011) 1396–1405.

Abnormal migration of multi-particles in the Poiseuille flow of a Giesekus fluid

LIU Bing-rui, LIN Jian-zhong

(State Key Laboratory of Fluid Power and Mechatronic Systems, Institute of Fluid Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, 310027. Email: brliu@zju.edu.cn)

Abstract: The lateral migration of particles in the Poiseuille flow of a Giesekus viscoelastic fluid is investigated numerically using the direct forcing/fictitious domain method. We focus on the trajectories of three particles and the single particle under different conditions. Due to the hydrodynamic interparticle interaction, the trajectory of one particle among the three particles does not coincide with that of the single particle, even the migration direction of three particles is different from that of the single particle. The results show that there is a separatrix between the centerline and the wall. When the initial position of particle is between the centerline and the separatrix, the particle would eventually migrate to the centerline, otherwise the particle would migrate to the wall. Under the conditions that the single particle can move towards the centerline, some particles in multi-particles could migrate to the wall.

Key words: Particle interaction, Particle migration, Giesekus fluid, Poiseuille flow, fictitious domain method

布朗凝并中粒子群的动能耗散率

谢明亮

(华中科技大学煤燃烧国家重点实验室, 武汉, 430074, Email: mlxie@mail.hust.edu.cn)

摘要: 布朗凝并可认为是一种粒子间的完全非弹性碰撞过程, 当两个粒子合并成一个粒子时, 就会产生动能损失。本文基于泰勒级数展开矩方法, 分析粒子群的动能耗散率。结果显示粒子群动能耗散率与粒子数密度的减少率是一致的。这将有助于从热力学角度认识粒子动力学的演化性质。

关键词: 粒子群; 动能; 耗散率; 布朗凝并; 矩方法

1 引言

由于布朗凝并的存在, 气溶胶粒子群的数密度函数将随着时间和空间进行演化, 这将导致系统的粒子数量的减少。由于凝并是一种完全非弹性碰撞过程, 因此, 凝并过程中必然伴随着粒子动能的减少^[1]。根据二元完全非弹性碰撞理论, 有质量守恒:

$$m = m_1 + m_2 \quad (1)$$

动量守恒

$$mu = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (2)$$

以及动能损失

$$\Delta K.E. = \frac{1}{2} mu^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2 \leq 0 \quad (3)$$

而对粒子系统而言, 其动能耗散率可表达成

$$\frac{dK.E.}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \Delta K.E. \beta(v_1, v_2) n_1(v_1) n_2(v_2) dv_1 dv_2 \quad (4)$$

由于布朗凝并是由分子热运动所驱动的，根据分子动力学的能量均分原理，粒子的速度可表示成：

$$u^2 = \frac{k_B T}{m} \quad (5)$$

因此，系统的动能耗散率可表示为：

$$\frac{dK.E.}{dt} = -\frac{k_B T}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - 2 \frac{\sqrt{v_1 v_2}}{v_1 + v_2} \right) \beta(v_1, v_2) n_1(v_1) n_2(v_2) dv_1 dv_2 \quad (6)$$

2 泰勒级数展开矩方法（TEMOM）

从数学角度而言，矩方法是一种积分变换方法，基于粒子体积的 k 阶矩的定义为：

$$M_k = \int_0^\infty v^k n(v) dv, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

对应的粒子矩的变化率可表示为：

$$\frac{dM_k}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[(v + v_1)^k - v^k - v_1^k \right] \beta n_1 n_2 dv dv_1 \quad (8)$$

泰勒级数展开矩方法是由于明州教授等人 2008 年发展起来的一种求解非线性数学积分问题的方法^[2]，其核心思想是将积分核函数的非线性项进行泰勒级数多项式近似，且高级矩量可用低阶矩量进行表达。

基于上述思想，对于自由分子区的碰撞频率核函数

$$\beta_{FM} = B_1 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1} \right)^{1/2} (v^{1/3} + v_1^{1/3})^2; B_1 = (3/4\pi)^{1/6} (6k_B T / \rho_p)^{1/2} \quad (9)$$

对应的动能耗散率为：

$$\frac{dK.E.}{dt} = \sqrt{2} B_1 k_B T \frac{(985 M_C^2 - 5202 M_C + 3897) M_1^{1/6} M_0^{11/6}}{5184} \quad (10)$$

类似地，对于连续区的碰撞频率核函数

$$\beta_{CR} = B_2 \left(\frac{1}{v^{1/3}} + \frac{1}{v_1^{1/3}} \right) (v^{1/3} + v_1^{1/3}); B_2 = 3k_B T / 2\mu \quad (11)$$

其对应的动能耗散率为：

$$\frac{dK.E.}{dt} = \frac{B_2 k_B T (621M_C^2 - 2538M_C + 1917) M_0^2}{2592} \quad (12)$$

3 渐进分析

自由分子区，布朗凝并问题的渐进解为^[3]

$$M_0 = 0.3133B_1^{-6/5} M_1^{-1/5} t^{-6/5}; M_2 = 7.0222B_1^{6/5} M_1^{11/5} t^{6/5}; M_C = 2.2001 \quad (13)$$

动能耗散率可表示为：

$$\frac{dK.E.}{dt} = -0.09033k_B T B_1^{-6/5} M_1^{-1/5} t^{-11/5} \quad (14)$$

其渐进解为：

$$K.E. \sim 0.07527k_B T B_1^{-6/5} M_1^{-1/5} t^{-6/5} \quad (15)$$

相对增长率为

$$\left| \frac{1}{K.E.} \frac{dK.E.}{dt} \right| = \frac{1.2}{t} \quad (16)$$

类似地，在连续区布朗凝并的渐进解为：

$$M_0 = \frac{81}{169} B_2^{-1} t^{-1}; M_2 = \frac{338}{81} B_2 M_1^2 t; M_C = 2 \quad (17)$$

动能耗散率方程可简化为：

$$\frac{dK.E.}{dt} = -\frac{25}{96} B_2 k_B T M_0^2 \quad (18)$$

其渐进解为

$$K.E. = \frac{54675}{913952} k_B T B_2^{-1} t^{-1} \quad (19)$$

相对增长率为

$$\left| \frac{1}{K.E.} \frac{dK.E.}{dt} \right| = \frac{1}{t} \quad (20)$$

4 结论

通过对比动能的相对耗散率和粒子数密度的减少率,可发现不论在自由分子区和连续区都存在

$$\left| \frac{1}{K.E.} \frac{dK.E.}{dt} \right| = \left| \frac{1}{M_0} \frac{dM_0}{dt} \right| \quad (21)$$

即二者是相等的。

参考文献

- 1 Sheldon K. Friedlander. Smoke, Dust, and Haze: Fundamentals of Aerosol Dynamics. London: 2nd edition Oxford University Press, 2000.
- 2 Mingzhou Yu, Jianzhong Lin, and Tatleung Chan. "A new moment method for solving the coagulation equation for particles in Brownian motion." Aerosol Science and Technology 42 (2008): 705–713.
- 3 Mingliang Xie, LianPing Wang. "Asymptotic Solution of Population Balance Equation Based on TEMOM Model." Chemical Engineering Science 94 (2013): 79–83.

The dissipation rate of kinetic energy for Brownian coagulation

XIE Ming-liang

(State Key Laboratory of Coal Combustion, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074.

Email: mlxie@mail.hust.edu.cn)

Abstract: Brownian coagulation can be considered as a perfectly inelastic collision. When the coalescing particles stick together, the kinetic energy is lost. In this study, the dissipation rate of kinetic energy is analyzed based on the moment method. The result shows that the dissipation rate of kinetic energy is the same as the growth rate of particle number density at long time, which will be helpful to understand the Brownian coagulation from point of view of thermodynamics.

Key words: Kinetic energy; Dissipation rate; Brownian coagulation; Moment method; Asymptotic solution

空化对叶顶间隙泄漏流动影响的数值模拟研究

徐默涵, 程怀玉, 季斌*

(武汉大学 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉, 430072, Email: jibin@whu.edu.cn)

摘要: 本研究采用 LES 方法和 Schnerr-Sauer 空化模型对 NACA0009 水翼的叶顶间隙泄漏空化流动进行数值模拟研究, 主要讨论了空化对叶顶间隙泄漏流动及流场内涡结构的影响。结果表明, 虽然宏观上泄漏涡空化和分离涡空化对泄漏涡、分离涡、诱导涡等涡结构的影响较小, 但是空化带来了强烈的涡量输运, 同时空化的发生使得叶顶泄漏涡的 Q 值和轴向涡量有所降低。

关键词: 叶顶间隙泄漏空化流动; 叶顶泄漏涡; 涡量

1 引言

叶顶间隙泄漏流动是轴流式水力机械中普遍存在的流动现象, 从叶梢脱落下来的涡卷吸发展形成所谓的叶顶泄漏涡, 造成流道阻塞、效率损失和压力波动^[1]。如果叶顶泄漏涡的强度足够大, 涡核低压区就会产生涡空化, 对叶片和流道外侧壁面造成严重的侵蚀, 同时还会产生噪声^[2]。目前已经有一系列有关叶顶间隙泄漏流动以及叶顶泄漏涡空化的实验和数值模拟研究。

在实验研究方面, 最近 Dreyer 等^[3]针对 NACA0009 水翼进行了非常细致的实验测量, 揭示了存在一个特定的叶顶间隙大小使得叶顶泄漏涡强度达到最大, 他们也系统研究了叶顶间隙大小与叶顶泄漏涡空化之间的关系以及空化对叶顶泄漏涡产生的影响。他们的实验研究不仅加深了我们对叶顶泄漏空化流动的认识, 同时为验证数值模拟结果提供了非常重要的实验数据。

在数值模拟方面, 与叶顶间隙流场及其内空化流动相关的研究也有很多。目前广泛采用的湍流模型包括 RANS 和 LES。大量研究表明, LES 方法在预测一些精细的旋涡结构和体现叶顶泄漏涡非定常特性方面表现得更好^[4]。当空化发生时, 数值模拟的另一个关键因素就是空化模型。已有研究证明利用 Schnerr-Sauer (SS)、Zwart-Gerber-Belamri (ZGB)等空

化模型可以得到精度相对较高的模拟结果^[5-6]。这些研究工作给本研究提供了重要参考,但是以往这些工作大多围绕修正空化模型以得到更高的模拟精度以及研究叶顶间隙大小对叶顶间隙泄漏流动的影响展开,有关空化对叶顶间隙泄漏流动及流场内涡结构的影响却显见报道。

为此,本研究以 NACA0009 水翼为研究对象,采用 LES 方法和 SS 空化模型进行模拟计算,通过与实验摄影图像的对比验证模拟结果的可靠性,并基于模拟结果,讨论空化对叶顶间隙泄漏流动及流场内涡结构的影响。

2 数值方法及模拟设置

本研究采用 LES 方法和 SS 空化模型对绕 NACA0009 水翼的叶顶间隙泄漏空化流动进行模拟。

根据 Dreyer 等^[3]的实验,本研究的坐标系、计算域和边界条件如图 1 所示。NACA0009 水翼的弦长 $C=100\text{mm}$ 。入口总压设置为 153kPa ,出口速度设置为 10 m/s 。水翼和叶顶间隙处的流道壁面设置为无滑移壁面条件,其他流道壁面设置为自由滑移壁面。水翼攻角固定为 10° 。选取两个中等叶顶间隙大小($\tau=0.7, 1.0$),其中 τ 是无量纲化的叶顶间隙尺寸($\tau=Gap/h$, 其中 Gap 为叶顶间隙的实际尺寸, $h=9.9\text{mm}$ 为水翼最大厚度)。

本研究采用笛卡尔网格进行模拟计算。通过网格无关性分析,最终选用一套节点量为 5,249,089 ($\tau=0.7$)的网格进行计算。在数值计算中,先采用 SST $k-\omega$ 湍流模型进行定常计算,以此结果作为 LES 计算的初场;然后采用 LES 方法和 SS 空化模型来模拟非定常空化流场。

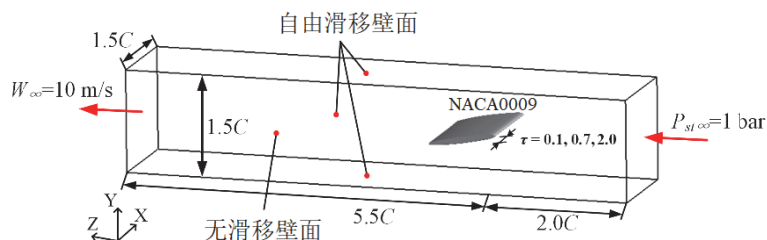


图 1 坐标系、计算域和边界条件

3 结果与讨论

图 2 对比了模拟结果与实验摄影图像,可见数值模拟较好地捕捉到了从水翼导边一直延伸到下游较远处的叶顶泄漏涡空化和叶顶面的叶顶分离涡空化。同时,预测的叶顶泄漏涡空化轨迹与实验较为吻合,对 $\tau=0.7$ 间隙下叶顶泄漏涡空化和叶顶分离涡空化的融合现

象也有所体现。总体来看,模拟结果具有较高的精度。

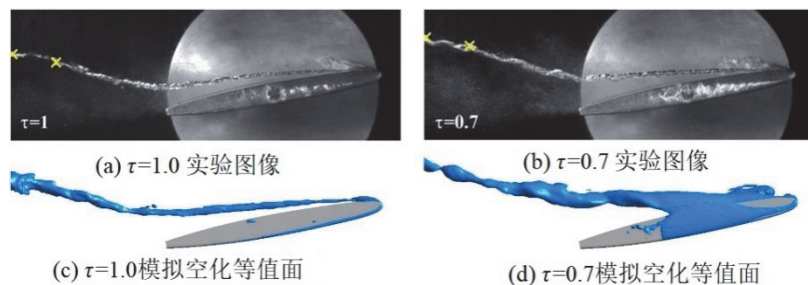


图2 模拟结果 ($\alpha_v=0.1$) 与实验摄影图像的对比

图3对比了无空化和空化工况下以 Q 准则显示的流场涡结构, Q 等值面以轴向涡量着色。可以发现,无论空化是否发生,叶顶间隙流场中均存在3种典型的涡结构:叶顶泄漏涡(Tip-leakage vortex, TLV)、叶顶分离涡(Tip-separation vortex, TSV)和叶顶诱导涡(Tip-induced vortex, TIV)。叶顶泄漏涡是在叶片压力面和吸力面之间压差的驱动下逐渐卷吸发展形成的,一直延伸到水翼下游很远的地方。正轴向涡量表明从水翼上游观察,叶顶泄漏涡呈顺时针方向旋转。叶顶分离涡几乎覆盖了整个叶顶面,与叶顶泄漏涡具有相同的旋转方向,并与叶顶泄漏涡在水翼随边附近完全融为一体,然后继续向下游发展。诱导涡是在水翼下游由泄漏涡从间隙壁面诱导形成,强度较低,没有导致相应的空化。诱导涡环绕着融合后的泄漏涡运动,其旋转方向与泄漏涡相反,因而诱导涡对泄漏涡具有较强的耗散作用。

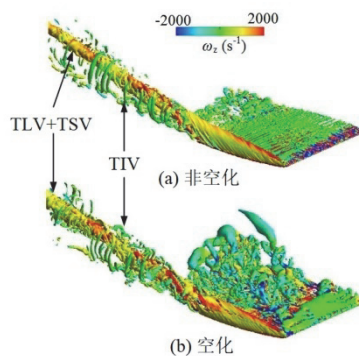


图3 Q 准则显示的流场涡结构 ($Q=1\times 10^5$), $\tau=1.0$

图3表明与片空化脱落和云空化引起吸力面附近复杂的涡结构相比,泄漏涡空化和分离涡空化对泄漏涡、分离涡、诱导涡的影响较小。虽然宏观上空化对泄漏涡等涡结构的影响较小,但是进一步对比各过流断面上分别在空化和无空化状态下的轴向涡量分布(图4),可以发现空化使泄漏涡高涡量区域中出现了低涡量区域,且集中在空化核心区域,表明空化带来了强烈的涡量输运。Bai等^[5]和Cheng等^[6]已对其中具体的涡量输运机制进行了深入的探讨。

图5进一步定量对比了叶顶泄漏涡分别在无空化和空化工况下的特性参数(最大 Q 值、

最大轴向涡量)。可见在考察的两个间隙大小下,无论空化是否发生,叶顶泄漏涡的最大 Q 值和最大轴向涡量均在 $-0.4 \leq z/C \leq -0.2$ 区域内陡降,然后平缓下降;同时空化的发生使得叶顶泄漏涡的 Q 值和轴向涡量有所降低。

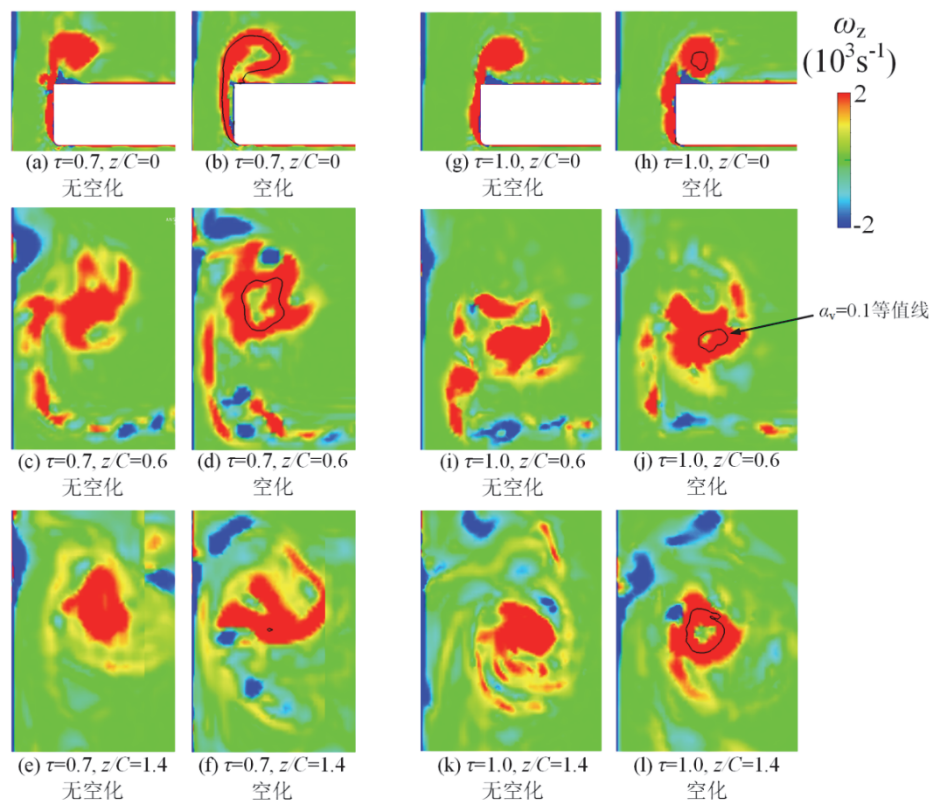


图4 无空化和空化状态下轴向涡量的对比

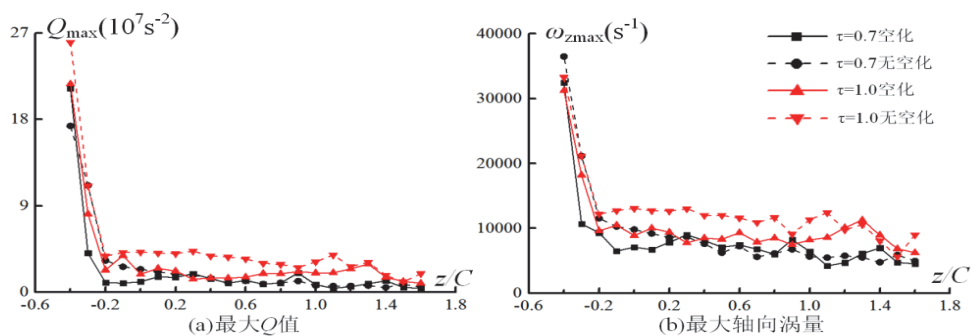


图5 叶顶泄漏涡特性参数随流向的变化

4 结论

本研究采用 LES 方法和 SS 空化模型对绕 NACA0009 水翼的叶顶间隙泄漏空化流动进行了数值模拟研究。结果表明虽然宏观上泄漏涡空化和分离涡空化对泄漏涡、分离涡、诱导涡等涡结构的影响较小,但是空化带来了强烈的涡量输运,同时空化的发生使得叶顶泄漏涡的 Q 值和轴向涡量有所降低。

参考文献

- 1 Jianjun Feng, Xingqi Luo, Pengcheng Guo, et al. Influence of tip clearance on pressure fluctuations in an axial flow pump [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2016, 30(4): 1603-1610.
- 2 Yabin Liu, Lei Tan, Binbin Wang. A Review of Tip Clearance in Propeller, Pump and Turbine [J]. Energies, 2018, 11(9): 2202.
- 3 Matthieu Dreyer, Jean Decaix, Cécile Münch-Alligné, et al. Mind the gap: a new insight into the tip leakage vortex using stereo-PIV [J]. Experiments in Fluids, 2014, 55(11): 1849.
- 4 J. Decaix, G. Balarac, M. Dreyer, et al. RANS and LES computations of the tip-leakage vortex for different gap widths [J]. Journal of Turbulence, 2015, 16(4): 309-341.
- 5 Xiao-rui Bai, Huai-yu Cheng, Bin Ji, et al. Large eddy simulation of tip leakage cavitating flow focusing on cavitation-vortex interaction with Cartesian cut-cell mesh method [J]. Journal of Hydrodynamics, 2018, 30(4): 750-753.
- 6 H. Y. Cheng, X. R. Bai, X. P. Long, et al. Large eddy simulation of the tip-leakage cavitating flow with an insight on how cavitation influences vorticity and turbulence [J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 77:788-809.

Numerical simulation of the influence of cavitation on tip clearance flow

XU Mo-han¹, CHENG Huai-yu¹, JI Bin^{1*}

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan, 430072, Email: jibin@whu.edu.cn)

Abstract: In the present paper, LES method and Schnerr-Sauer cavitation model are utilized to simulate the tip-leakage cavitating flow around a NACA0009 hydrofoil. The influence of cavitation on the tip clearance flow and the vortex structures in the flow field is our main

concern. The results show that although tip-leakage vortex cavitation and tip-separation vortex cavitation have little effect on the vortex structures, like tip-leakage vortex, tip-separation vortex and induced vortex, at the macro level, cavitation brings about intense vorticity transport. Meanwhile, the occurrence of cavitation decreases the Q -value and axial vorticity of tip-leakage vortex.

Key words: Tip-leakage cavitating flow; Tip-leakage vortex; Vorticity.

近壁面空泡与常压气泡的耦合作用研究

黄潇, 宋健, 胡海豹, 杜鹏

(西北工业大学 航海学院, 西安, 710072, Email: huangxiao@nwpu.edu.cn)

摘要: 在船舶与海洋工程领域, 空化气泡(空泡)坍塌效应对结构造成的剥蚀是一个严峻的问题。现有的研究表明, 空泡在刚性壁面附近坍塌射流指向壁面, 在水气交界面附近坍塌射流方向背离交界面。受上述现象的启发, 本文在近壁面与空泡之间布置常压气泡(气垫), 采用数值仿真的方法对空泡-气泡-壁面这一耦合系统中空泡的动力学行为开展了参数化研究。研究表明, 当常压气泡尺寸比 η (常压气泡半长轴 a 与半短轴 b 之比)较大时, 空泡坍塌效应受到了明显的抑制, 同时出现背离壁面的反向射流。当空泡强度较大时, 与空泡尺寸相当的常压气泡对空泡的防护效果很不明显, 甚至由于常压气泡的二次储能, 反而会在壁面上和空泡一同诱导出叠加载荷。本文的研究剖析了不同参数配置下, 常压气泡对近壁面空泡坍塌行为的影响, 有望为削弱空蚀效应的进一步研究提供基础支撑。

关键词: 空化气泡(空泡); 边界元法(BEM); 常压气泡; 刚性壁面

1 引言

空泡(群)的坍塌溃灭对舰艇螺旋桨、水轮机叶片的剥蚀损伤一直以来是威胁海军作战和水利机械有效工作的隐患^[1]。桨叶在水中高速运动时, 将造成其周围流场压力的降低。此时存在于水中的微米尺度气核开始生长, 形成空泡^[2]。研究表明, 空泡在刚性壁面附近运动时, 在其坍塌阶段, 会从远离壁面处产生一股高速水流, 压迫空泡, 最终冲击在壁面上; 空泡在壁面附近反复地生成和坍塌, 是造成上述剥蚀损伤的主要因素之一^[3]。

然而, 当空泡在自由液面附近运动时, 坍塌阶段的水射流则会背离自由液面运动^[4]。基于这一事实, 设想如果在刚性结构表层布置一层气膜, 改变空泡附近边界的性质, 则有望使空泡坍塌射流背离刚性边界, 从而实现保护结构不被空化剥蚀的目标。为此, 本文针对这一设想, 开展数值研究, 将模型简化为空泡、气垫、刚性壁面从上到下布放的形式, 研究气垫作用下, 刚性壁面附近空化气泡的动力学行为。

截至目前, 空泡在各种不同类型边界附近的动力学行为已经得到了比较充分的研究。在实验方面, 研究者们通过高速摄影系统, 观察了空泡诱导的自由液面水豕现象^[5], 以及近壁面空泡的溃灭行为^[6]。在数值仿真方面, 研究者们则通过多种数值方法, 如通过格子玻尔兹曼方法^[7]观测多枚上浮气泡之间的耦合作用特性; 通过欧拉有限元方法解决爆炸气

泡和复杂结构的强非线性相互作用行为^[8]；通过边界元方法探究气泡坍塌成环状时在刚性边界上诱导的流场动载荷情况^[9]。在这众多的数值方法当中，边界元法以其能减小问题的一个维度为优势，广泛被用在气泡动力学问题的求解当中^[10]。

本研究采用计及气-液边界层黏性作用的边界元方法，研究初始高压的空泡与常压气泡之间的耦合作用关系，探索常压气泡存在下，壁面附近空泡动力学行为的特点。

2 数值模型

将问题简化后的模型如图 1 所示。流场 Ω 中，在水平刚性壁面上建立坐标系 $Oxyz$ ，坐标原点 O 在刚性壁面上，坐标轴 z 的正向垂直向上。半径为 R 的空泡，其内部压力为 p_b ，型心 O_b 到刚性壁面距离为 D_R 。在流场中，空泡正下方有常压气泡一枚，其型心记为 O_c ，到空泡的距离为 D_{bc} ，内部压力为 p_c 。常压气泡初始形状为椭圆回转体，截面长半轴和短半轴分别记为 a 和 b 。

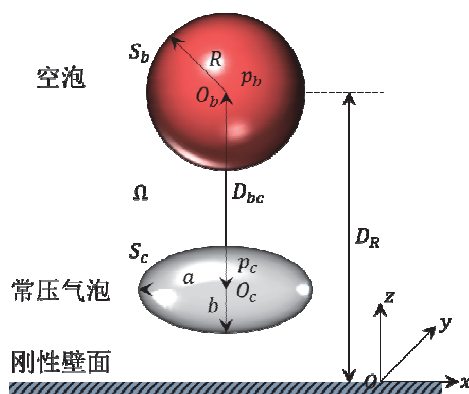


图 1 空化气泡与常压气泡在刚性壁面附近相互作用示意图

通常假设在该问题中，气泡周围的流场是不可压缩且无旋的^[11]，那么此时存在流场的速度势 φ ，且有流场中流体质点速度 $\boldsymbol{v} = \nabla \varphi$ 。而速度势 φ 满足 Laplace 方程，即

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

空泡内部压力 p_b 由饱和蒸汽压力 p_v 和不可冷凝气体压力 p_n 两部分组成，即

$$p_b = p_v + p_n = p_v + p_{n0} \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma \quad (2)$$

其中, V 和 V_0 分别表示空泡的瞬时体积和初始体积。 γ 表示气体的比热容比, 为 1.4。

水中的空泡直径通常只有毫米量级, 其周围流场的雷诺数很小, 通常在 $O(10)$ 的量级^[12]。此时流场的黏性效应不可忽略。在气泡周围的黏性边界层中, 引入黏性压力修正项 p_{vc} , 该项用于修正水-气界面上的切向黏性应力和法向黏性应力。此时, 气泡表面流体质点上的压力可以表示为

$$p_l = p_b - 2\sigma\kappa - p_{vc} + \tau_n, \quad \tau_n = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \quad (3)$$

这里 σ , κ 和 μ 分别表示表面张力系数、界面局部曲率以及流体的动力学黏性系数。

借助格林第二公式可以将控制方程(1)表达为边界积分方程:

$$\xi(\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p}) = \oint_S \left[G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial n} - \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n} \right] dS \quad (4)$$

上式中, $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 分别被称为场点和源点, 分布在流场的所有边界 S 上。 S 包括空泡表面 S_b , 常压气泡表面 S_c 以及无限大刚性壁面的表面。 $G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1/|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ 为核函数。而在边界元方法中, 平直无限大刚性壁面可以通过镜像法来表征其影响, 可参考边界元相关著作^[13]。通过该式可以得到边界上的法向速度 $\partial \varphi / \partial n$, 从而用运动学边界条件获得边界的位置更新。同时借助 Bernoulli 方程更新边界速度势, 使计算得以持续。

3 结果与讨论

3.1 无量纲化与数值模型验证

在开展气垫影响下近壁面空泡动力学行为研究之前, 首先要对相关参数进行无量纲化。本研究选取空泡初始半径 R_0 , 标准大气压 p_0 以及流体密度 ρ 作为无量纲参数。其中初始半径 R_0 设为 1 mm。后续的结果中的数值均为无量纲化后所得。

囿于篇幅所限, 对本文的数值模型验证请参考作者之前发表的相关论文^[14-15]。通过与计入边界层黏性效应的经典 Rayleigh-Plesset 方程以及前人的实验结果对比, 可知本文建立的数值模型有足够高的精度。能够胜任所提出的研究任务。

3.2 不同空泡强度下气垫的防护效果

在本小节中, 保持气垫的尺寸比 $\eta = a/b = 1$, 讨论空泡初始内压 (空泡强度) 变化时, 气垫的防护效果。图 2 中, 3 种工况下壁面均在 $z = 0$ 处。在保持空泡初始位置到壁面和到常压气泡距离相同时, 逐渐减小气泡的初始内部压力由 $p_b = 15$ 到 $p_b = 2$, 发现常压气泡的作用逐渐变得明显。初始与空泡有相同尺寸的常压气泡, 在空泡强度较小时, 能够抑制空泡朝向刚性边界的射流, 而自身呈现倒置的“蘑菇”形, 有效抑制了空泡对壁面的潜在损伤。

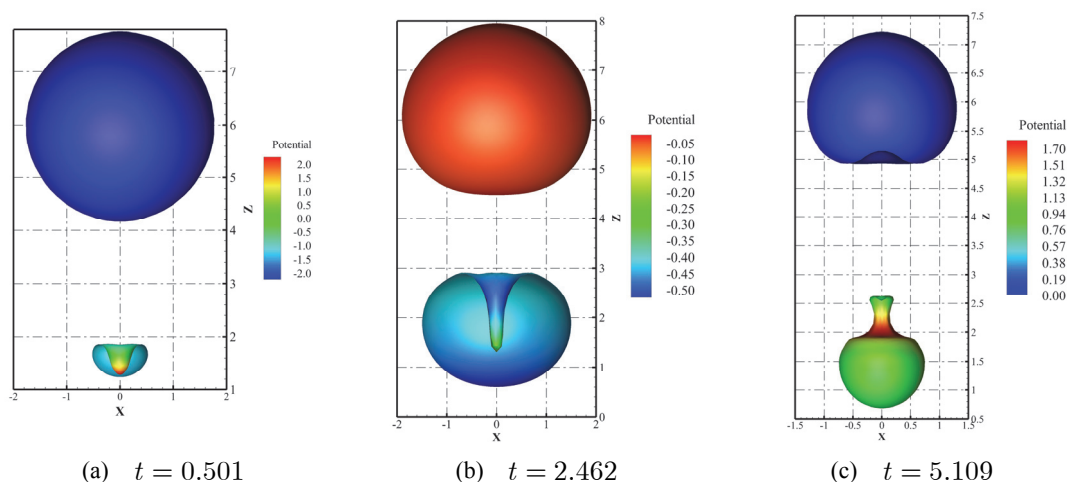


图2 不同初始强度的空泡与气垫相互作用情况

(a) $p_b = 15$ (b) $p_b = 5$ (c) $p_b = 2$; 其余参数: $D_R = 6$, $D_{bc} = 4$, 且 $a = b = 1$

3.3 不同常压气泡形态下空泡的演化特性

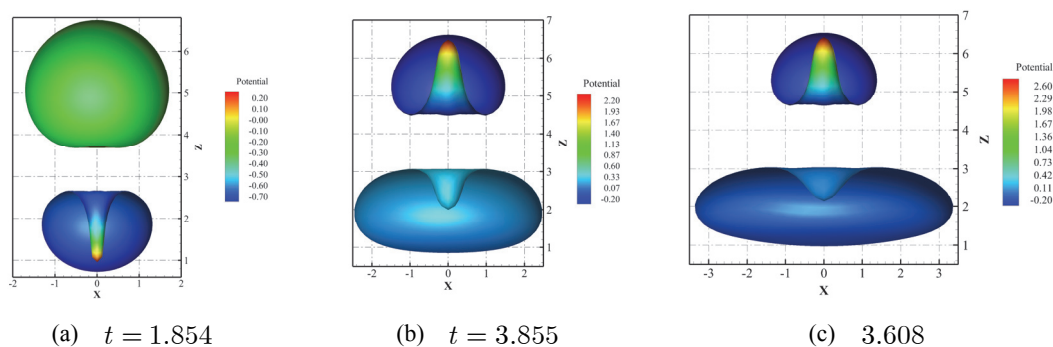


图3 常压气泡初始形态不同时, 与近壁面空泡相互作用情况

(a) $\eta = 1$ (b) $\eta = 2$ (c) $\eta = 3$; 其余参数: $p_b = 4$, $D_R = 5$, $D_{bc} = 3$

图3则给出了当常压气泡的形态由与空泡等大的球体逐渐变成扁平的气垫时, 空泡的形态演化情况。与空泡大小相等的常压气泡难以抑制空泡的坍塌, 并且自身在空泡的诱导下产生了朝向壁面的射流。起到的防护作用十分有限。而当气垫的尺寸比增大后, 比如图3(b)中的 $\eta = 2$ 和图3(c)中的 $\eta = 3$, 此时气垫的作用体现得愈发明显。气垫本身在空泡的作用下产生了轻微的凹陷。但在这个过程中完全抑制了空泡的向下坍塌, 反之使空泡射流方向向上, 完全壁面了空泡对壁面的碰击。

4 结论

结合空泡在刚性壁面附近及在自由液面附近的动力学行为特点,从空泡对结构剥蚀防护的角度出发,提出了在近壁面空泡下方布置常压气泡(气垫)的构想。通过改进的黏性边界层势流理论,采用边界元方法对上述问题开展研究。研究表明,常压气泡对空泡坍塌的抑制作用与空泡的初始强度以及常压气泡的初始形态息息相关。总体来说,常压气泡的铺展面积要比空化气泡更大,才能较好地抑制空泡朝向壁面的坍塌。这为空泡剥蚀防护提供了参考方案。

参考文献

- 1 Chahine G L, Hsiao C T. Modelling cavitation erosion using fluid-material interaction simulations [J]. Interface Focus, 2015, 5(5): 20150016.
- 2 M S Plesset a, Prosperetti A. Bubble Dynamics and Cavitation [J]. Annu Rev Fluid Mech, 1977, 9(1): 145-185.
- 3 Nicolas B, Manish A, Claus-Dieter O, Detlef L. Cavitation on surfaces [J]. Journal of Physics: Condensed Matter, 2005, 17(45): S3603.
- 4 Blake J R, Taib B B, Doherty G. Transient cavities near boundaries Part 2. Free surface [J]. J Fluid Mech, 1987, 181: 197-212.
- 5 Zhang S, Wang S P, Zhang A M. Experimental study on the interaction between bubble and free surface using a high-voltage spark generator [J]. Phys Fluids, 2016, 28(3): 032109.
- 6 Klaseboer E, Hung K, Wang C, Wang C, Khoo B, Boyce P, Debono S, Charlier H. Experimental and numerical investigation of the dynamics of an underwater explosion bubble near a resilient/rigid structure [J]. J Fluid Mech, 2005, 537: 387-413.
- 7 Gupta A, Kumar R. Lattice Boltzmann simulation to study multiple bubble dynamics [J]. Int J Heat Mass Tran, 2008, 51(21-22): 5192-5203.
- 8 Tian Z L, Liu Y L, Zhang A M, Wang S P. Analysis of breaking and re-closure of a bubble near a free surface based on the Eulerian finite element method [J]. Comput Fluids, 2018, 170: 41-52.
- 9 Zhang A M, Li S, Cui J. Study on splitting of a toroidal bubble near a rigid boundary [J]. Phys Fluids, 2015, 27(6): 062102.
- 10 Cheng A H D, Cheng D T. Heritage and early history of the boundary element method [J]. Eng Anal Bound Elem, 2005, 29(3): 268-302.
- 11 Best J P. The dynamics of underwater explosions [D]; University of Wollongong, 1991.
- 12 Wang Q X, Blake J R. Non-spherical bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. Travelling acoustic wave [J]. J Fluid Mech, 2010, 659: 191-224.
- 13 姚振汉, 王海涛. 边界元法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- 14 Huang X, Wang S, Liu Y, Hu H. Dynamic interaction of a bubble and discontinuous boundaries: A three-dimensional study with the fast multipole boundary element method [J]. Eng Anal Bound Elem, 2020, 110: 1-15.
- 15 Huang X, Wang Q-X, Zhang A M, Su J. Dynamic behaviour of a two-microbubble system under ultrasonic wave excitation [J]. Ultrason Sonochem, 2018, 43: 166-174.

On the interaction between a cavitation bubble and a gas bubble near a rigid wall

HUANG Xiao, SONG Jian, HU Hai-bao, DU Peng

(School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072.

Email: huangxiao@nwpu.edu.cn)

Abstract: In the field of ship and ocean engineering, the collapse of cavitation bubbles is the main cause of the erosion of marine structures. Previous researches reveal that the water jet in a collapsing bubble tends to shoot towards the rigid wall and away from the air-water surface, for the bubble in the neighbourhood of different kind of boundaries. Inspired by this point, we set a gas bubble between the cavitation bubble and the rigid wall, intending to prevent the strong water jet. Results show that when the size ratio η (the ratio of major semi-axis to minor semi-axis) is large, the collapse of the cavitation bubble is restrained and the collapse water jet shoots away from the rigid boundary. For a gas bubble which has the same size as the cavitation bubble, its protection of the boundary is limited if the initial inner pressure of the cavitation bubble is high. The strong cavitation bubble may even induce the collapse of the gas bubble and result in a secondary damage of the wall. This work conducts parametric studies on the effect of the gas bubble onto the cavitation bubble and aims at providing protection method of the cavitation erosion.

Key words: Cavitation bubble; Boundary element method (BEM); Gas bubble; Rigid wall

MCC 内波模型的色散关系研究

张天钰, 赵彬彬*, 王泽航

(哈尔滨工程大学 船舶工程学院, 哈尔滨, 150001, Email: zhaobinbin@hrbeu.edu.cn)

摘要: MCC 内波模型是目前国内外两层流体间内波问题研究的一种常用内波模型, 它可以对浅水模式中的大幅强非线性内波进行准确描述。但是, 由于 MCC 内波模型的色散关系未被研究, 导致部分研究学者认为 MCC 内波模型对强色散性内波可以进行准确描述, 可以有效地表征实际海洋中强色散甚至完全色散内孤立波的特征。本研究对 MCC 内波模型(包括考虑自由面效应的 MCC-FS 模型和引入刚盖近似的 MCC-RL 模型)的色散关系进行研究, 给出 MCC 内波模型的适用范围。我们使用 MATHEMATICA 软件对 MCC 内波模型进行了线性化分析, 得到了线性色散关系式, 通过与两层流体间内波的准确线性色散关系结果进行对比, 得到了 MCC 内波模型的适用范围。研究表明, MCC 内波模型适用于浅水模式内波的研究 ($h_1/\lambda \ll 1$, $h_2/\lambda \ll 1$ 中 h_1 及 h_2 分别代表上、下层水深, λ 为内波特征波长), 对于强色散性内波的描述存在较大误差, 超出了 MCC 内波模型的适用范围。

关键词: 强非线性内波; MCC 内波模型; 色散关系; MCC-FS 内波模型; MCC-RL 内波模型

1 引言

海洋内波是指在海水稳定层化的海洋中产生的、最大振幅出现在海洋内部的波动, 是一种常见的自然现象。其中, 我国南海更是全球海洋中内波最强、最为活跃、生成和演变机制最为复杂的海域, 曾被评价为研究大幅内波的“天然实验室”。由于强非线性大幅内波在传播过程中携带着巨大的能量, 对海洋结构物以及海洋潜器的安全有着严重的威胁。因此, 对海洋内波的研究, 对于我国南海海洋环境的认识和开发具有极大的现实意义。

在研究内波问题的理论模型中, KdV 模型是最早且应用最广泛的内波模型, 但由于 KdV 模型建立在弱色散性、弱非线性且两者平衡条件下, 因此该模型难以对大幅强非线性内孤立波进行准确的预报^[1]。考虑到大幅内孤立波的强非线性特点, Miyata^[2-3]、Choi 和 Camassa^[4]从完全非线性的欧拉方程出发, 通过引入层平均速度来描述内波的两层流体间内波的水平速度场, 建立了适用于描述大幅内孤立波的强非线性模型, 即 MCC (Miyata-Choi-Camassa) 模型。

由于 MCC 模型形式并不复杂, 同时没有引入小幅波假定, 因此, 该模型得到了国内外的广泛研究和应用。其中, 对于上下层流体密度比较接近的情况, 通过引入刚盖近似可以得到 MCC-RL 内波模型^[3-4]; 对于上下流体密度相差较大的情况, 则必须要考虑自由面

的影响,最终可以得到 MCC-FS 内波模型^[5]。

尽管有研究者对 MCC 模型的适用范围进行了研究^[6],但由于 MCC 模型的线性色散关系未被研究,导致部分研究学者认为 MCC 内波模型对强色散性内波仍可以进行准确描述,并能有效地表征实际海洋中强色散甚至完全色散内孤立波的特征。

因此,本研究的动机是使用 Mathematica 软件,通过对 MCC 内波模型的方程进行线性化分析,进而得到线性色散关系,并与两层流体间内波的准确线性色散关系进行对比,最终得到 MCC 模型的适用范围。

2 MCC 内波模型的控制方程

考虑两层流体间的内波问题,假定各层流体均为理想不可压缩且无旋。流体未受扰动时,上层流体厚度为 h_1 ,密度为 ρ_1 ;下层流体厚度为 h_2 ,密度为 ρ_2 。建立直角坐标系 oxz ,其中, ox 轴与未扰动的内界面重合,指向内孤立波传播方向, oz 轴垂直向上为正。刚盖近似下的两层流体间内孤立波传播示意图如图 1(a)所示,保留自由面的示意图如图 1(b)所示。

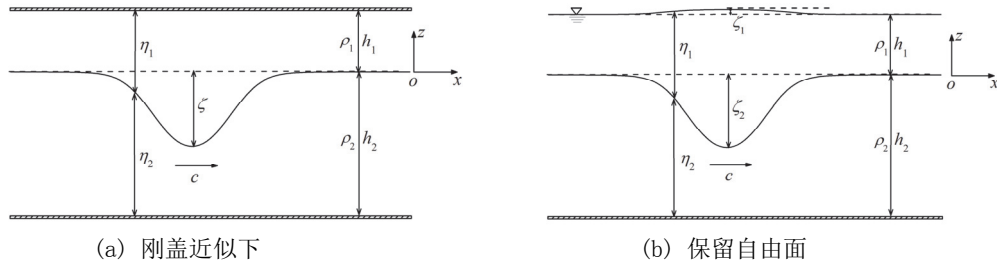


图 1 两层流体间内孤立波示意图

2.1 MCC-RL 内波模型

Choi 和 Camassa^[4]从连续性方程以及欧拉方程出发,推导了基于刚盖近似下的 MCC-RL 模型:

$$\eta_{1t} + (\eta_1 \bar{u}_1)_x = 0, \quad \eta_1 = h_1 - \zeta, \quad (1)$$

$$\eta_{2t} + (\eta_2 \bar{u}_2)_x = 0, \quad \eta_2 = h_2 + \zeta, \quad (2)$$

$$\frac{\rho_1}{\eta_1} \left(\frac{1}{3} \eta_1^3 G_1 \right)_x - \rho_1 (\bar{u}_{1t} + \bar{u}_1 \bar{u}_{1x} + g \zeta_x) = \frac{\rho_2}{\eta_2} \left(\frac{1}{3} \eta_2^3 G_2 \right)_x - \rho_2 (\bar{u}_{2t} + \bar{u}_2 \bar{u}_{2x} + g \zeta_x), \quad (3)$$

其中, ζ 是内波界面位移, g 是重力加速度, η_1 , η_2 分别为上层流体与下层流体的厚度,如图 1(a)所示, $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ 分别是上层流体和下层流体的层平均水平速度。更多关于 MCC-RL 模型的推导及其稳态解求解可以参考 Miyata^[2]。

2.2 MCC-FS 内波模型

Kodiara 等^[5]给出了保留自由面的 MCC-FS 模型方程及其求解方法。其中,模型方程

如下:

$$\eta_{1t} + (\eta_1 \bar{u}_1)_x = 0, \quad \eta_1 = h_1 + \zeta_1 - \zeta_2, \quad (4)$$

$$\eta_{2t} + (\eta_2 \bar{u}_2)_x = 0, \quad \eta_2 = h_2 + \zeta_2, \quad (5)$$

$$\bar{u}_{1t} + \bar{u}_1 \bar{u}_{1x} + g(\eta_1 + \eta_2)_x = \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{1}{3} \eta_1^3 G_1 \right)_x - \frac{1}{\eta_1} \left(\frac{1}{2} \eta_1^2 D_1^2 \eta_2 \right)_x + \left(\frac{1}{2} \eta_1 G_1 - D_1^2 \eta_2 \right) \eta_{2x}, \quad (6)$$

$$\bar{u}_{2t} + \bar{u}_2 \bar{u}_{2x} + g \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \eta_1 + \eta_2 \right)_x = \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{1}{3} \eta_2^3 G_2 \right)_x + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{1}{2} \eta_1^2 G_1 - \eta_1 D_1^2 \eta_2 \right)_x, \quad (7)$$

其中, 由于保留了自由面, 如图 1(b) 中所示, ζ_1 表示自由面位移, ζ_2 表示内波界面位移。更多关于 MCC-FS 模型的推导及求解可以参考 Kodiara 等^[5]。

3 MCC 内波模型的线性色散关系

本节中, 主要推导了 MCC-RL 内波模型以及 MCC-FS 内波模型的线性色散关系式, 并通过与准确的线性色散关系进行比较, 对 MCC 内波模型的适用范围进行了研究。

3.1 MCC-RL 内波模型的线性色散关系

假定内波波面 ζ 及层平均水平速度 $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ 均是一阶小量, 将式(1)至式(3)中的二阶及二阶以上的项抛弃, 可以得到线性化后的 MCC-RL 模型方程:

$$\zeta_t - h_1 \bar{u}_{1x} = 0, \quad (8)$$

$$\zeta_t + h_2 \bar{u}_{2x} = 0, \quad (9)$$

$$3(\rho_2 \bar{u}_{2t} - \rho_1 \bar{u}_{1t}) + 3g\zeta_x (\rho_2 - \rho_1) + h_1^2 \rho_1 \bar{u}_{1xx} - h_2^2 \rho_2 \bar{u}_{2xx} = 0. \quad (10)$$

假定内波波面 ζ 按照余弦形式变化, 即

$$\zeta(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (11)$$

其中, A 为波幅, k 为波数, ω 为内波频率。将式(11)代到式(8)至式(10)中, 可以得到 MCC-RL 内波模型的线性色散关系式:

$$c^2 = \frac{3gh_1h_2(1-\bar{\rho})}{\bar{\rho}h_2(3+h_1^2k^2) + h_1(3+h_2^2k^2)}. \quad (12)$$

其中, $\bar{\rho} = \rho_1 / \rho_2$ 。为了对 MCC-RL 内波模型的适用范围进行研究, 我们将 MCC-RL 内波模型的线性色散关系与准确的色散关系进行对比, 其中准确的线性色散关系为^[7]:

$$c_{exact}^2 = \frac{g(1-\bar{\rho})}{\bar{\rho}k \coth(kh_1) + k \coth(kh_2)}. \quad (13)$$

针对上、下两层流体密度比为 $\rho_1 / \rho_2 = 999 / 1022$ （与 Grue 等^[1]的物理实验及数值算例相同）的工况进行分析,分别考虑上下层厚度比为 $h_1 / h_2 = 1/4.13, 1/10, 1/15$ 三种工况。图 2 中展示了不同水深比下, MCC-RL 内波模型的线性色散关系与准确解的对比。

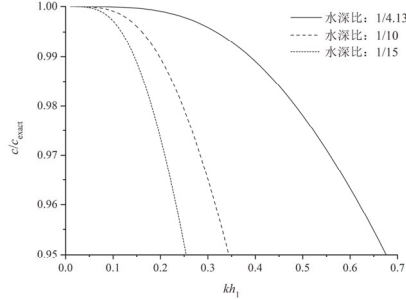


图 2 MCC-RL 内波模型的线性色散关系与准确解对比, $\rho_1 / \rho_2 = 999 / 1022$

从图 2 中可以得到 MCC-RL 内波模型的适用范围。以 MCC-RL 内波模型的线性色散关系与准确解的误差小于 5% 作为准确预报的判据,我们发现对于 $h_1 / h_2 = 1/4.13, 1/10, 1/15$ 这三种工况, MCC-RL 理论的适用范围分别为 $kh_1 < 0.68$, $kh_1 < 0.34$ 以及 $kh_1 < 0.25$ 。可以看出, MCC-RL 内波模型仅能对浅水模式 ($h_1 / h_2 = 1/4.13$) 下的内波进行准确地预报,而无法对深水模式下的内波进行准确地预报。

3.2 MCC-FS 内波模型的线性色散关系

假定自由面 ζ_1 、内波波面 ζ_2 及层平均水平速度 $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ 均是一阶小量,将式(4-7)中的二阶及二阶以上的项抛弃,可以得到线性化后的 MCC-RL 模型方程:

$$\zeta_{1t} - \zeta_{2t} + h_1 \bar{u}_{1x} = 0, \quad (14)$$

$$\zeta_{2t} + h_2 \bar{u}_{2x} = 0, \quad (15)$$

$$h_1 \bar{u}_{1t} + h_1 g \zeta_{1x} + h_1^2 (3\zeta_{2xt} - 2h_1 \bar{u}_{1xxt}) = 0, \quad (16)$$

$$6h_2 \bar{u}_{2t} - 2h_2^3 \bar{u}_{2xxt} + 6gh_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\zeta_{1x} - \zeta_{2x} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \zeta_{2x} \right) + 3h_1 h_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} (2\zeta_{2xt} - h_1 \bar{u}_{1xxt}) = 0. \quad (17)$$

同样,假定自由面 ζ_1 、内波波面 ζ_2 均按照余弦形式变化,即

$$\zeta_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx), \quad (18)$$

$$\zeta_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx), \quad (19)$$

其中, A_1 为自由面最大位移, A_2 为内波波幅,将式(18-19)代到式(14-17)中,通过 MATHEMATICA 软件,可以得到 MCC-FS 内波模型的线性色散关系为:

$$c^2 = \frac{6g}{B2} \left(B1 - \sqrt{B1^2 + h_1 h_2 (\bar{\rho} - 1) B2} \right), \quad (20)$$

其中,

$$B1 = (h_1 + h_2) (3 + h_1 h_2 k^2),$$

$$B2 = 3h_1 h_2 k^2 (12 + h_1^2 k^2) \bar{\rho} + 4(3 + h_1^2 k^2)(3 + h_2^2 k^2)。$$

同样, 将 MCC-RL 内波模型的线性色散关系与准确的色散关系进行对比, 其中准确的线性色散方程为^[8]:

$$\left(\frac{k}{k_0}\right)^2 (1 - \bar{\rho}) \tanh kh_1 \tanh kh_2 - \frac{k}{k_0} (\tanh kh_1 + \tanh kh_2) + \bar{\rho} \tanh kh_1 \tanh kh_2 + 1 = 0 \quad (21)$$

其中, $k_0 = \omega^2 / g$, $\omega = c_{exact} \times k$ 。这里需要说明的是, 当给出 k 值之后, 求解线性准确波速 c_{exact} 时, 会对应两个正实根, 分别对应内波的表面波模态以及内波模态, 在具体计算时, 需要取内波模态结果作为准确线性解。

针对上、下两层流体密度比相差较大时, 取 $\rho_1 / \rho_2 = 856 / 996$ (与 Kodaira 等^[5]的物理实验及数值算例相同) 的工况进行分析, 分别考虑上下层厚度比为 $h_1 / h_2 = 1/5, 1/10, 1/15$ 三种工况。图 3 中展示了不同工况下, MCC-FS 内波模型的线性色散关系与准确解的对比。

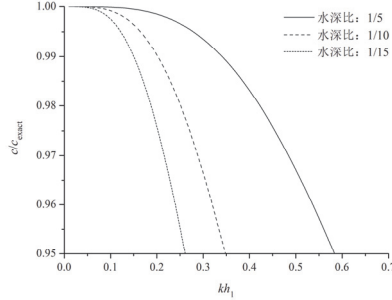


图 3 MCC-FS 内波模型的线性色散关系与准确解对比, $\rho_1 / \rho_2 = 856 / 996$

从图 3 中我们可以得到 MCC-FS 内波模型的适用范围。以 MCC-FS 内波模型的线性色散关系与准确解的误差小于 5% 作为准确预报的判据, 我们发现对于 $h_1 / h_2 = 1/4, 1/3, 1/10, 1/15$ 这三种工况, MCC-FS 理论的适用范围分别为 $kh_1 < 0.58$, $kh_1 < 0.35$ 以及 $kh_1 < 0.26$ 。与 MCC-RL 内波模型类似, MCC-RL 内波模型仅能对浅水模式 ($h_1 / h_2 = 1/5$) 下的内波进行准确地预报, 而无法对深水模式下的内波进行准确地预报。

4 结论

通过对 MCC 内波模型的方程进行线性化分析, 给出了 MCC-RL 模型以及 MCC-FS 内波模型的线性色散关系式, 并与准确解进行对比, 对 MCC 模型的适用范围进行研究。可以发现 MCC 内波模型可以对浅水模式下的内波进行准确地描述, 并不适用于深水模式下的内波进行准确地描述。

致谢

本研究工作是在国家自然科学基金(批准号: 51490671, 11572093)资助下完成。

参考文献

- 1 Grue, J., Jensen, A., Rusas, P-O., Sveen, J. K. Properties of large-amplitude internal waves[J]. Journal of Fluid Mechanics. 1999, 380: 257-278.
- 2 Miyata, M. An internal solitary wave with large amplitude. La Mer, 1985, 23(2): 43-48.
- 3 Miyata, M. Long internal waves with large amplitude. Proceedings of the IUTAM Symposium on Nonlinear Water Waves, 1988.
- 4 Choi, W, Camassa, R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 396: 1-36.
- 5 Kodaira, T., Waseda, T., Miyata, M., Choi, W. Internal solitary waves in a two-fluid system with a free surface[J]. Journal of Fluid Mechanics. 2016, 804: 201-223.
- 6 黄文昊, 尤云祥, 王旭, 胡天群. 有限深两层流体中内孤立波造波实验及其理论模型[J]. 物理学报. 2013, 08: 354-367.
- 7 Lamb, H. Hydrodynamics. 1932
- 8 姜胜超, 滕斌, 勾莹. 两种水面边界条件下的内波解及其比较[J]. 中国海洋平台, 2008, 023(003):11-16.

Study on dispersion relation of MCC Internal Wave Model

ZHANG Tian-yu, ZHAO Bin-bin^{*}, WANG Ze-hang

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, 150001.

Email: zhaobinbin@hrbeu.edu.cn)

Abstract: MCC internal wave model is a commonly used internal wave model for the study of internal waves between two-layer fluids system, it can accurately describe large and strong nonlinear internal waves in shallow water. However, because the dispersion relation of the MCC internal wave model has not been studied, some researchers think that the MCC internal wave model can accurately describe the strong dispersive internal waves and can effectively characterize the characteristics of strong dispersive or even completely dispersive internal solitary waves in the real ocean. In this paper, the dispersion relation of MCC internal wave model (including MCC-FS model considering free surface effect and MCC-RL model with rigid cover approximation) is studied, and the applicable range of MCC internal wave model is given. We use MATHEMATICA software to linearize the MCC internal wave model and obtain the linear dispersion relation. By comparing the results with the accurate linear dispersion relation of the internal wave between the two layers of fluid, the applicable range of the MCC internal wave model is obtained. The research shows that the MCC internal wave model is suitable for the study of internal waves in shallow water, and there is a big error in the description of strong dispersive internal waves, which is beyond the applicable scope of MCC internal wave model.

Key words: Strongly nonlinear internal wave; MCC model; dispersion relation; MCC-FS model; MCC-RL model

自由液面对直航潜艇水动力性能影响分析

李鹏¹, 王文全², 王超¹, 韩阳¹, 郭春雨¹

(1, 哈尔滨工程大学 跨尺度测试分析团队, 哈尔滨, 150001.

2, 中国船舶工业公司第 708 研究所, 上海, 200011

Email: harder1314@163.com)

摘要: 为了掌握潜艇在近自由液面航行时的性能特征以帮助其设计优化。本文采用 CFD(Computational Fluid Dynamics)方法, 基于 Volume of Fluid (VOF)模型和 Large Eddy Simulation (LES)湍流模型对在近自由液面航行的 Sub-off 的流场开展仿真计算, 就相关工况开展方法的验证(verification)和证实(validation), 提高数值仿真的可靠性; 接着对不同航速、潜深下多个工况进行数值计算, 对比分析潜深对潜艇阻力的影响。计算表明: 潜艇的近自由液面航行中, 兴波波系耦合作用是潜艇阻力变化的重要原因。数值仿真结果为潜艇近自由液面航行的研究提供新颖的研究思路和研究方向。

关键词: 潜艇; 自由液面; VOF; LES; 自由液面

1 引言

对于潜艇而言, 在近水面进行任务观测、定位是必要的作战需求, 同时靠近自由液面的换气操作能保证潜艇内部有足够且较优质的空气可维持潜艇适航能力。自由液面和潜艇的耦合作用会导致自由液面的变形, 反之自由液面的变形会影响潜艇的性能, 如阻力增加、艇体表面压力梯度改变以及流场的改变。由此可知研究自由液面与潜艇的相互作用是潜艇性能研究的重要部分。国内外诸多学者对潜艇或水下航行器在近自由液面航行时的性能进行过研究。Abdolrahman^[1]基于 $k-\varepsilon$ 湍流模型计算不同潜深、雷诺数下 UWV(underwater vehicles)的阻力、尾流场特征并和实验结果取得良好的吻合结果并表明: 随着潜深的降低, 阻力系数不断增加。Stefan^[2]对 sub-off 裸艇体在浮潜深度(at snorkel depth)下阻力性能进行试验研究, 提出俯撑式试验带来的阻力测量误差约占据 70%; Ashok^[3]用试验证实潜艇无限潜深条件下其表面摩擦阻力系数、黏性压差阻力系数与 L/D (艇长/艇体直径)呈反比。

本文以 Star CCM+为工具, 基于 LES 湍流模型开展网格和时间步长收敛性分析, 对比阻力实验数据验证数值仿真方法的可靠性和正确性; 接着, 对 3 个潜深及各对应的 3 个速度开展仿真计算, 总结分析得出潜艇兴波波系的耦合作用是潜艇阻力变化的主要原因, 本文的研究能从新的角度或方向探讨潜艇近自由液面航行时的性能。

2 数值仿真基础

2.1 理论基础

大涡模拟(large eddy simulation, LES)^[4-5]是对紊流脉动(紊流涡)的一种空间平均,通过过滤函数将大尺度涡和小尺度涡分离开,大尺度涡进行直接模拟,小尺度涡用模型来封闭。大涡模拟的理论基础是在高雷诺数紊流中存在惯性尺度的涡,该涡具有统计意义上各项同性的性质,理论上它既不含能量也不耗散能量,将含能尺度的涡的能量传递给耗散尺度的涡。LES 中,亚格子尺度模型较 RANS(雷诺平均方程)包含更少的经验系数和定义系数,当流体计算的网格尺寸足够小时,亚格子尺度模型对流动的影响会降至最低,更小范围内的流体流动,即小于网格尺寸的湍流流动会被亚格子尺度模型移出模拟结果。本文使用的是 Smagorinsky 亚格子尺度模型,它是基本的原始亚网格尺度模型,并且是很多更高级模型的基础。

2.2 模型及计算域

国际标模 Sub-off 具备详细的几何模型资料和较为详尽的试验数据,详细的模型资料可参考文献[6-8],考虑到模型尺度对计算资源的需求,本文对原标准模型进行缩放开展数值仿真计算,缩尺比为 $\lambda=0.6887$,模型总长 $L=3\text{m}$,最大直径 $D=0.35\text{m}$ 。

计算域因是否涉及自由液面而存在差异。无限潜深的计算域、坐标系(遵从右手定则)及边界条件见图 1,后续文中参考的圆柱坐标系,其轴向与图 1 中 x 轴向相同,半径方向为与图 1 中 z 轴相同,角度轴垂直纸面向外。计算域为圆柱,简单得知潜艇投影至圆柱上(下)底面的面积与圆柱上(下)底面的比小于 1%,参考 WILSON 等^[9]的研究可知,计算域截面尺寸造成的阻塞率可忽略不计;有限潜深计算中,潜深 H 定义为自潜艇旋转轴至自由液面的垂直距离,为波反射对计算的影响,在无限潜深计算域的基础上增加 $1L$ 为消波区,其计算域、坐标系(遵从右手定则)及其边界条件见图 2,圆柱坐标系的定义同上述,阻塞率亦可忽略。

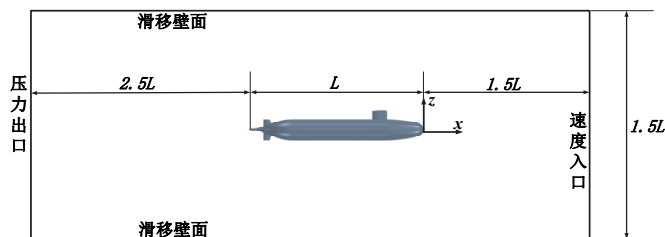


图 1 无限潜深计算域及边界条件

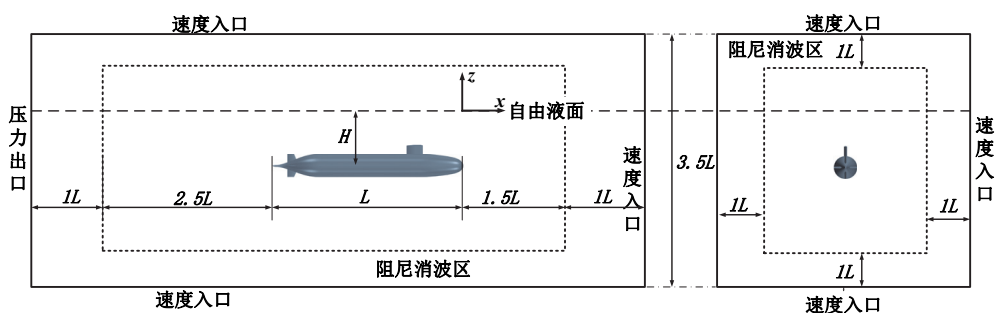


图2 有限潜深计算域及边界条件

2.3 网格、时间步长及工况设定

选用4套网格开展网格收敛分析,分别定义为网格方案1-4,4套网格的 Y^+ 值均小于 $1^{[10]}$,边界层厚度分别为0.001、0.0015、0.002、0.0025mm,均为21层,具体网格分布信息见表1,4套网格的面网格及体网格尺寸以 $\sqrt{2}$ 为缩放比例(k),图3是网格方案3的网格简图。时间步长分为3个,在保证1个时间步长内,自由流场的流动距离小于最小网格流向尺度的情况下,分别是0.0005、0.001、0.0015s。

表1 4套网格方案的信息

网格方案	围壳表面	尾舵表面	艇体表面	计算域
1	9.8k	2.6k*4	267k	6.93M
2	11.6k	3.1k*4	294k	8.13M
3	13.0k	4.1k*4	311k	9.82M
4	15.1k	5.3k*4	352k	12.0M

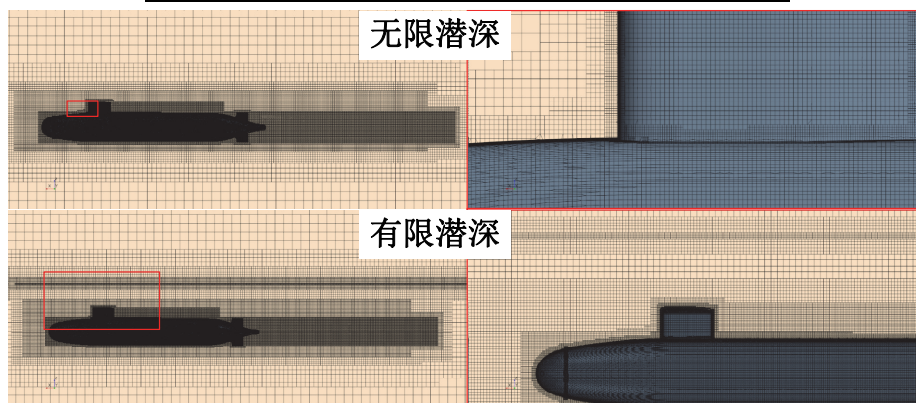


图3 网格方案3

根据S Wilson-Haffenden、S. Khalil Shariati等的研究^[11-12],当潜艇的潜深 H 大于 $3D$ 时,自由液面对潜艇水动力性能的影响即较为微弱。因此本文设定潜深 H 为 $1D$ 、 $2D$,其中 H

是潜深即自由液面距离潜艇旋转轴线的垂直距离，具体见图 2。每个潜深下有 3 个航行速度 U ，分别是 1.5 m/s，2.5 m/s，3.5m/s。

3 收敛性分析

网格和时间步长的收敛性计算是提高数值模拟可靠性和精确度的重要步骤之一^[13-14]。就傅汝德数 $Fr = 0.461$ 开展收敛性计算并定义艇体总阻力系数 $C_R = R / (0.5\rho U^2 L^2)$ ，黏性阻力系数 $C_{R_v} = R_v / (0.5\rho U^2 L^2)$ 和压差阻力系数 $C_{R_p} = R_p / (0.5\rho U^2 L^2)$ ，式中 R 是艇体总阻力， R_v 是艇体黏性阻力， R_p 艇体压差阻力， ρ 是流体密度；上述 3 个无因次系数作为收敛性分析的评判系数。4 套网格的计算结果见表 2。

表 2 4 套网格方案的计算结果

评判系数	网格方案 1	网格方案 2	网格方案 3	网格方案 4
$1000C_R$	1.133	1.156	1.169	1.175
$1000C_{R_v}$	0.962	0.974	0.984	0.989
$1000C_{R_p}$	0.171	0.182	0.185	0.186

网格收敛率 $K = \varepsilon_{i,i+1} / \varepsilon_{i,i-1}$ ， $\varepsilon_{i,i+1}$ 是较密两方案结果差， $\varepsilon_{i,i-1}$ 是较稀两方案结果差。 K 的计算结果可能是 $K > 1$ ， $0 < K < 1$ 或 $K < 0$ ^[14-16]。由此可知本次计算选用的网格呈现单调收敛特性，采用理查森外推法^[16]评估网格的收敛阶。首先须评估离散阶，式中 k 取 $\sqrt{2}$ ：

$$P = \ln(\varepsilon_{i,i-1} / \varepsilon_{i,i+1}) / \ln k \quad (1)$$

评估三套网格的收敛指数：

$$I_{i,i+1} = D_S |e_{i,i+1}| / (k^P - 1) \quad (2)$$

式中 $D_S = 1.25$ 为网格收敛安全系数^[16]； $e_{i,i+1} = \varepsilon_{i,i+1}$ 。网格收敛性计算结果见表 3。理论上，当 $P=2$ 时，网格正交性或湍流模型非线性影响计算结果的准确性的程度最小^[12,16]，选用中等密度网格进行数值计算具有较高可靠性。可知方案 2 至方案 4 具有更好的收敛率且离散精度更接近理论值，故后续的计算中采用网格方案 3 进行计算。艇体上表面压力系数在后三套网格方案间的差异十分微弱，基本不受网格细化的影响。

表 4 是不同时间步长计算得到的判定系数结果，以 0.001s 的计算结果为基准进行对比。可以看出：不同时间步长对计算结果的影响较小，为提高计算效率，后续的计算中均采用 0.001s 为时间步长。图 4 是本文计算得到不同航速下的阻力值与实验值的对比，可以看出仿真结果和实验结果取得良好的吻合，证实数值仿真的正确性。综上，在后续的计算中均采用基于网格方案 3 的网格划分结果。

表 3 网格收敛性计算结果

网格方案	参数	$1000 C_R$	$1000 C_{R_V}$	$1000 C_{R_P}$
1~3	K	0.565	0.833	0.273
	P	1.646	0.526	3.749
	I	0.021	0.063	0.001
2~4	K	0.462	0.500	0.333
	P	2.231	2.000	3.170
	I	0.006	0.006	0.001

表 4 不同时间步长计算结果

时间步长	$1000 C_R$	$1000 C_{R_V}$	$1000 C_{R_P}$
0.0005s	1.164	0.983	0.181
0.0010s	1.169	0.984	0.185
0.0015s	1.171	0.984	0.187

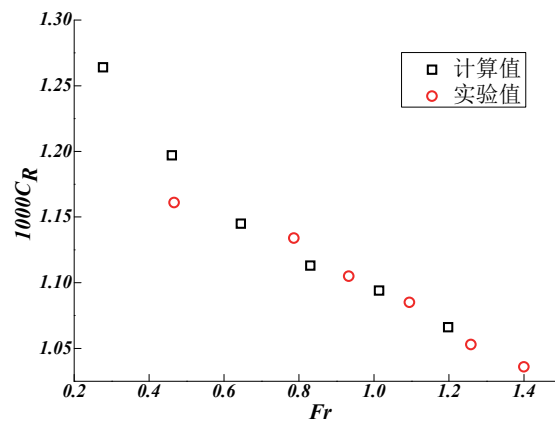


图 4 潜艇阻力系数计算值和实验值对比结果

4 结果与分析

4.1 潜艇阻力

自由液面的变形会改变艇体表面的压力分布和两者间的流动速度变化，文献[2,11,12]等的研究表明自由液面的存在会增加潜艇阻力。图 5 是不同潜深及航速下的潜艇阻力系数变化曲线，可以看出艇体的黏性阻力基本不受自由液面的影响，而压差阻力对潜深的变化

更为敏感。

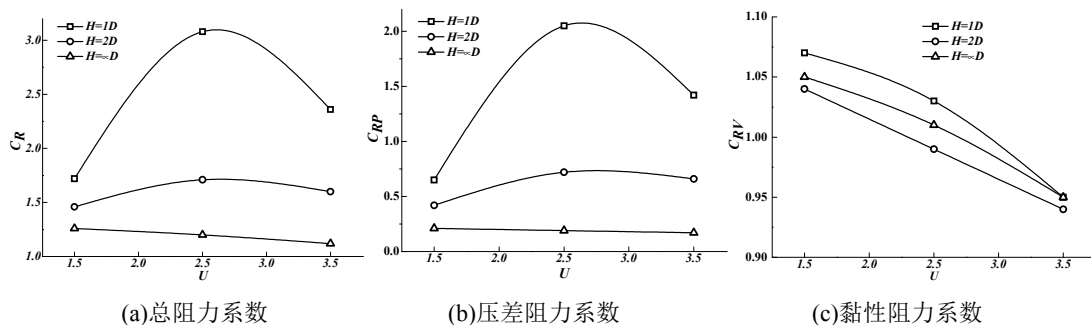


图 5 不同航速及潜深下的阻力系数变化曲线

4.2 潜艇压力场

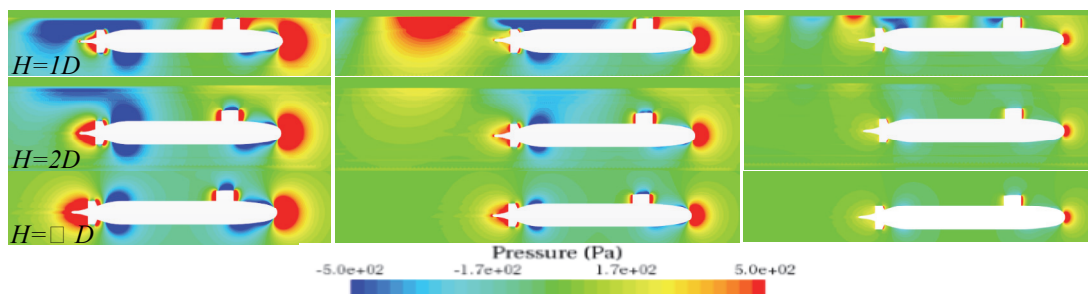


图 6 潜艇周围压力场云图

图 6 是不同航速和潜深下潜艇周围流场的压力场分布云图。对比可以看出：艇首部的曲率增加而形成顺压力梯度，在首肩处产生压力极大值，从而形成波峰起始的艇首波系，而艇尾曲率降低形成逆压力梯度，在尾肩处缠身压力极小值，进而形成波谷起始的艇尾波系。两个波系波长随着潜深、航速的不同而出现差异，当两者相位相同，波幅增加，当两者相位相反，波幅降低。潜艇的阻力变化亦和两者的相位变化有密切联系，Mojtaba 等人^[17]的研究也证实了这一观点。在 $1D$ 潜深时潜艇周围的流场压力变化同其它航速有所差异，艇体尾部低压区同比增加幅度明显，这也解释了 4.1 中阻力的变化曲线同其它潜深的曲线差异的原因。

4.3 自由表面兴波

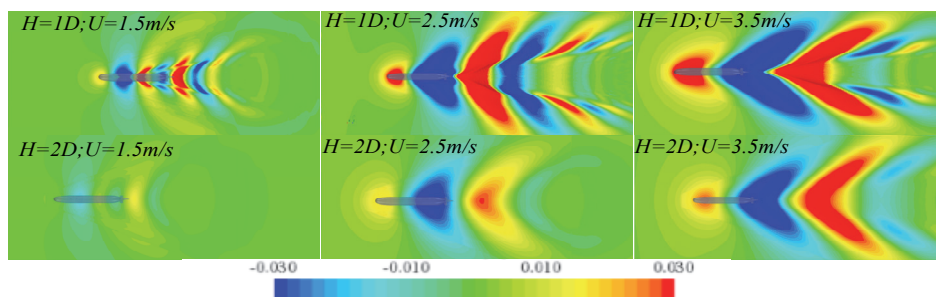


图 7 潜艇兴波变化

图 7 是不同潜深潜艇在自由液面的兴波, 随着航速的提高, 波长增加; 相同航速下, 随着潜深的降低, 兴波波幅增加, 波长变化不明显, 潜艇阻力系数的增加也更明显, 推断潜深对潜艇阻力系数的变化起主导作用。同时图 5 中压差阻力系数随潜深、航速的变化远大于黏性阻力系数的变化趋势证实这一点。

5 结论

本文以 sub-off 标模为对象, 对其在近自由液面直线航行的水动力性能、流场特性进行了仿真计算和对比分析, 得出如下结论: ①近自由液面航行时, 兴波波系的耦合作用与潜艇阻力变化密切相关, 当艇首波系与尾肩波系相位相同时艇体阻力增加, 反之当艇首波系和尾肩波系相位相反时艇体阻力降低; ②随着航速的提高, 波长增加; 相同航速下, 随着潜深的降低, 兴波波幅增加, 波长变化不明显。

参考文献

1. Nematollahi A, Dadvand A, Dawoodian M. An axisymmetric underwater vehicle-free surface interaction: A numerical study[J]. Ocean Engineering, 2015, 96(mar.1):205-214.
2. Skejic R, Daum S, Greve M. Effective Power and Speed Loss of Underwater Vehicles in Close Proximity to Regular Waves[C]// OMAE June 25–30, Trondheim, Norway. 2017.
3. Ashok A, Van Buren T, Smits A J. The structure of the wake generated by a submarine model in yaw[J]. Experiments in Fluids, 2015, 56(6):123.
4. 贾晓荷, 刘桦. 双圆柱绕流的大涡模拟[J]. 水动力学研究与进展, 2008, 23(6): 625-632.
5. 王玲玲. 大涡模拟理论及其应用综述[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2004, 32(3): 261-265.
6. Groves NC, Huang T T, Chang M S. Geometric characteristics of DARPA sub-off models[R]. David Taylor Research Center, Ship Hydrodynamics Department, 1989.
7. Han-Lieh L, Thomas T H. Summary of DARPA Suboff Experimental Program Data [R]. Naval Surface Warfare Center, Carderock Division(NSWCCD). 1998 :19-23.
8. Huang T, Liu H L, Groves N, Forlini T, Blanton J, Gowing S. Measurements of flows over an axisymmetric body with various appendages in a wind tunnel: The DARPA Suboff experimental program[C]// Proceedings of 19th Symposium on Naval Hydrodynamics. Seoul, Korea, 1992.
9. WILSON, R. E. 1994 Aerodynamic behavior of wind turbines. In Wind Turbine Technology, Fundamental Concepts of Wind Turbine Engineering (ed. D. Spera), pp. 251–282. ASME Press.
10. 胡健, 耿冲, 冯峰. 基于大涡模拟的螺旋桨梢涡数值分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2017, 45(11): 73-78.
11. Wilson-H, Renilson M, Ranmuthugala D, et al. An Investigation into the Wavemaking Resistance of a Submarine Travelling Below the Free Surface.2020
12. Shariati S K, Mousavizadegan S H. The effect of appendages on the hydrodynamic characteristics of an underwater vehicle near the free surface[J]. Applied Ocean Research, 2017, 67:31-43.
13. Shariati S K, Mousavizadegan S H. The effect of appendages on the hydrodynamic characteristics of an underwater vehicle near the free surface[J]. Applied Ocean Research, 2017, 67:31-43.
14. Stern F, Wilson R V, Coleman H W, et al. Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD Simulations—Part 1: Methodology and Procedures[J]. J Fluid Eng, 2001, 123(4):792.

15. Wilson R V , Stern F , Coleman H W , et al. Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD Simulations—Part 2: Application for Rans Simulation of a Cargo/Container Ship[J]. J Fluid Eng, 2001, 123(4):803-810.
16. Roache, P. J . Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics[J]. Ann.rev.fluid Mech, 1997, 29(1):123-160.
17. Amiri M M , Sphaier S H , Vitola M A , et al. Investigation into the wave system of a generic submarine moving along a straight path beneath the free surface[J]. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 2019, 76:98-114.

The numerical investigation on the effect of the freesurface to the submarine in straightahead

LI Peng¹, WANG Wen-quan², WANG Chao¹, HAN Yang¹, GUO Chun-yu¹

(1.College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, 150001,

2. No. 708 Research Institute,China Shipbuilding Industry Corporation, Shanghai 200011, China)

Email:harder1314@163.com)

Abstract: In order to grasp the performance characteristics of the submarine sailing near the free surface to help its design optimization. This paper adopts CFD (Computational Fluid Dynamics) method, based on volume of fluid (VOF) model and large eddy simulation (LES) turbulence model is used to simulate the flow field of sub off sailing near the free surface, and the verification and validation of methods are carried out for relevant working conditions to improve the reliability of numerical simulation; then, the numerical calculation is carried out for several working conditions under different speeds and depths, and the influence of diving depth on submarine resistance is compared and analyzed. The results show that the coupling effect of wavemaking system is an important reason for the change of submarine resistance in near free surface navigation. The results of numerical simulation provide a new idea and direction for the research of submarine near free surface navigation.

Key words: Submarine; Free-surface; VOF; LES; Freesurface.

柔性板的自推进运动：前缘的边界条件如何影响自推进性能

吴文波

广州大学 机械与电气工程学院，广东省广州市，510006

摘要：在自然界中，鱼可以使用尾鳍前缘的肌节控制尾鳍上的波伏运动传播并进而达到推进效果。其控制方法可归纳为3种类型：主动升沉和主动俯仰(Active Heave and Active Pitch, AHAP)，被动升沉和主动俯仰(Passive Heave and Active Pitch, PHAP)，主动升沉和被动俯仰(Active Heave and Passive Pitch, AHPP)。哪种模式可以产生最大推进力？哪种模式最高效？到目前为止，尚未在文章中找到有关这些问题的研究。在本文中，我们研究了由这3种模式驱动的柔性板的自推进。本文的结果期望能进一步揭示鱼类的运动机理，并为机器人鱼的设计和控制在提供新的思路。

关键词：自推进；柔性板；驱动模式；推进效率；推进力

1 引言

薄板、细长梁和细长棒等柔性结构已经被广泛用于模拟昆虫翅膀和鱼类尾鳍的流体动力学行为^[1-3]。鱼类尾鳍运动为典型的流固耦合问题，同时受到流体力、肌节作用力和身体的弹性特性影响^[4]。经过上亿年的进化，鱼类具有人造器械无法企及的游动表现，灵活而高效。通过探索鱼类的游动机制，仿生学为改进人造航行器设计以得到更高效的游动行为提供了新的思路 and 方向，并取得了一些成果^[5]。

在自然界，鱼类的尾鳍上没有肌肉组织的包覆，其运动仅仅靠与身体连接处的运动来带动^[6-7]。到目前位置，人类还不完全了解鱼类对于其尾鳍的驱动方式。如果采用柔性薄板对鱼类尾鳍进行建模，其前缘的驱动方式（即边界条件）可根据力学知识分为三类：主动升沉和主动俯仰(Active Heave and Active Pitch, AHAP)，被动升沉和主动俯仰(Passive Heave and Active Pitch, PHAP)，主动升沉和被动俯仰(Active Heave and Passive Pitch, AHPP)。

在以往的研究中，AHAP 驱动模式下的柔性薄板是对鱼类尾鳍最常见的建模方式，研

究人员采用该模型已经对鱼类的巡游行为有了一定程度的认识。与刚性薄板相比,柔性薄板能够产生更高的推进效率^[8-10],但同时其运动可能变得不稳定^[11-12]。Zhang 等^[13]和 Apagnolie 等^[14]指出,AHPP 驱动模式下的薄板在某些特定情况下能够产生比 AHAP 模式下更大的推进效率。Gravish 和 Wood^[15]研究了翼形结构的被动俯仰运动对其偏摆力矩的影响。据我们所知,到目前为止薄板在 PHAP 模式下自推进行为的研究还未见诸文献。

本文采用微幅振动薄板对鱼类尾鳍进行建模,并对其自推进响应进行了研究,分析了薄板在不同推进模式下的固有特征、推进力和推进效率随刚度的变化趋势。

2 问题描述

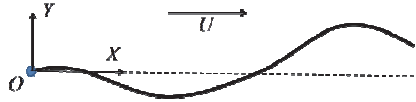


图 1 薄板示意图

图 1 为流体中的振动薄板示意图,惯性坐标系 XOY 的原点位于薄板前缘, U 为流体速度。薄板振动方程为

$$\rho_s A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F \quad (1)$$

其中, ρ_s 和 A 分别为薄板的密度和切面积。 EI 为抗弯刚度, y 为横向位移, x 为薄板位置点, t 为时间。 F 为薄板上的流体力。在本文中,原点 O 上的边界条件用来给定不同的驱动模式。

Lighthill^[1] 采用势流理论得到流体力表达式为

$$F = -\rho A \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} + U \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \quad (2)$$

其中, ρ 为流体密度。

将式(2)代入式(1), 并采用 ρ 、 l 和 U 作为基准量进行无量纲化, 得到

$$(\tilde{\rho} + 1) \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{t}^2} + \tilde{K} \frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^4} + 2 \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^2} = 0 \quad (3)$$

上式中, 第一项为惯性力, 第二项为弹性力, 第三项为流体产生的阻尼力, 第四项为流体引起的轴向压力。

薄板响应可表示为

$$\tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{y}_o \sin(\tilde{\omega}_o \tilde{t}) + \tilde{x} \theta_o \sin(\tilde{\omega}_o \tilde{t} + \psi_o) + \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad (4)$$

其中, 前两项为薄板前缘深沉和俯仰运动引起的刚性位移, 第三项为薄板的柔性变形。

3 水下薄板的固有特征

忽略式(3)中的阻尼力项,可得到水下薄板控制方程为

$$(\tilde{\rho}+1)\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{t}^2} + \tilde{K}\frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^2} = 0 \quad (5)$$

采用分离变量法对上式进行求解,得到水下薄板的特征方程为

$$\tilde{K}\lambda^4 + \lambda^2 - \tilde{\omega}^2(\tilde{\rho}+1) = 0 \quad (6)$$

根据力学常识可知,薄板在受到过大轴向压力时将发生失稳现象,因此我们首先讨论薄板振动稳定的条件。采用振动理论进行分析,即薄板的第一阶固有频率应为正值。得到薄板的刚度阈值为

$$(1) \text{ AHAP: } \tilde{K} = \frac{EI}{\rho l^2 U^2 A} > \frac{4}{\pi^2} \quad (7)$$

$$(2) \text{ PHAP: } \tilde{K} = \frac{EI}{\rho l^2 U^2 A} > \frac{1}{\pi^2} \quad (8)$$

$$(3) \text{ AHPP: } \tilde{K} = \frac{EI}{\rho l^2 U^2 A} > \frac{1}{2\pi^2} \quad (9)$$

由上式可知,薄板能够承受的最大流体速度与其刚度的平方根值成正比。如图2所示,具有相同刚度的薄板在AHPP驱动模式下能够承受最大的流体速度,在AHAP模式下稳定性最差。因此我们可以推断,尾鳍需要有足够大的刚度以推进鱼类向前运动,在高速游动中鱼类更适合采用AHPP驱动模式。

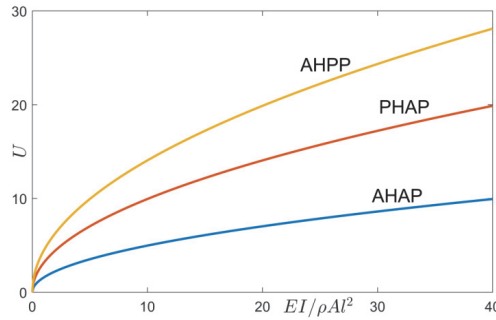


图2 流体速度阈值与薄板刚度的关系

4 薄板的自推进效率

采用假设模态法求解水下薄板的自推进响应,模态函数采用具有相应边界条件的线性

梁的模式，则

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \sum_m \phi_m(\tilde{x}) q_m(\tilde{t}) \quad (10)$$

式中 ϕ_m 为模态函数，本文取线性梁的前十阶模态进行计算。为了方便讨论，本文在下面的

内容中采用无量纲参数 $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\tilde{K}(\tilde{\rho}+1)\tilde{\omega}_0^2}-1}{2\tilde{K}}}$ 描述外部激励频率的影响。 $\tilde{\omega}_0 = \frac{l\omega_0}{U}$ 为

前缘边界给定的无量纲运动频率。

根据 Lighthill^[1,2]的势流理论分析，薄板的平均推进效率为

$$\eta = 1 - \frac{\left\{ \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right\}_{\tilde{x}=1}}{2 \left\{ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}} \right) \right\}_{\tilde{x}=1}} \quad (11)$$

图 3 给出 $\tilde{K} = 0.5, 0.7, 1.5$ and 2.5 时薄板的自推进效率随驱动频率的影响，其中点画线表示 $\tilde{K} = 2.5$ 时薄板的前五阶固有频率。图中自推进效率为负值时，表示薄板的运动不足以承受当前的流速，需要输入更多的能量保持其推进状态^[1]。在 AHAP 驱动模式下，任意刚度薄板的自推进效率都随驱动频率正弦形变化，如图 3(a)所示。薄板刚度越小，推进效率对驱动频率变化越敏感。当刚度足够大时，效率趋近并稳定在 0.5。推进效率在驱动频率接近第一阶固有频率时达到谷值，在接近第二阶固有频率时达到峰值。在 PHAP 模式下，推进效率呈阶段性变化。当驱动频率位移 $2n \sim 2n+1$ ($n=0,1,2,\dots$) 阶固有频率范围内时，任意刚度薄板的推进效率都小于 0.5 且在驱动频率和刚度都较小时可能为负值。当驱动频率位于 $2n+1 \sim 2n+2$ 阶固有频率范围内时，推进效率大于 0.5。在这一范围内，推进效率随驱动频率呈“M”形变化，且刚度越大中点的凹陷越明显。在 AHPP 模式下，薄板的推进效率在驱动频率低于一阶固有频率时小于 0.5 且可能为负值。当驱动频率位于 $2n+1 \sim 2n+2$ 阶固有频率范围内时，推进效率随驱动频率变化不明显。在范围 $2n+2 \sim 2n+3$ 阶固有频率内，推进效率随驱动频率呈“M”形变化，且刚度越大中点的凹陷越明显。

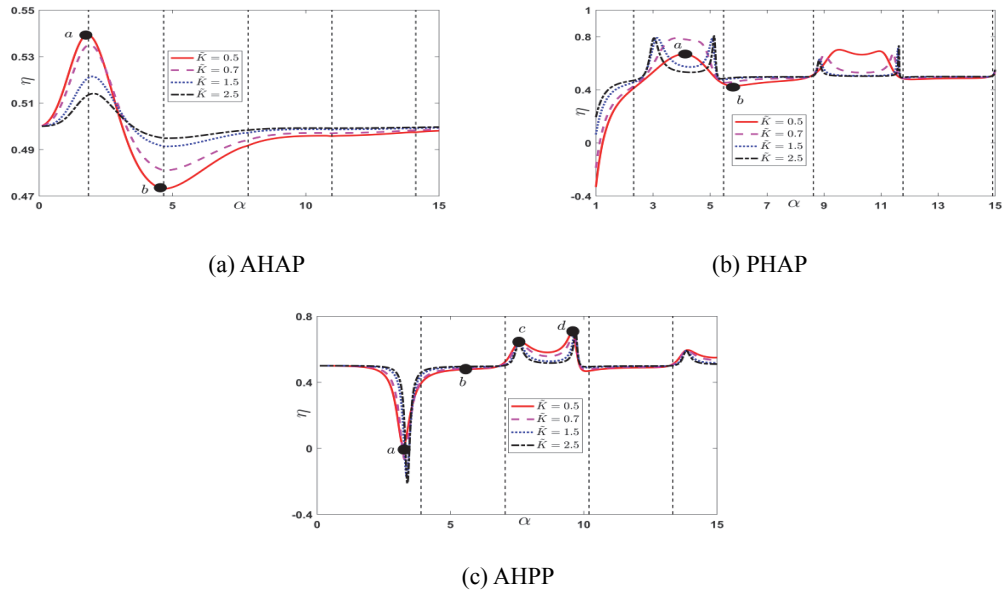


图3 不同刚度下薄板自推进效率随驱动频率的变化趋势

对于给定刚度的薄板，可以通过调节驱动频率使其推进效率达到最大。图4为最大推进效率随刚度的变化趋势。在AHAP模式中，最大推进效率随刚度的增大而减小并逐渐趋近于0.5。在PHAP模式中，最大推进效率在 $\tilde{K} < 0.32$ 范围内随刚度的增大而急剧减小。当 $0.32 < \tilde{K} < 0.72$ 时，最大效率随刚度的增大而急剧增大。当薄板刚度继续增大时，最大推进效率缓慢增加并逐渐趋于稳定。在AHPP模式下，最大推进效率在 $\tilde{K} < 0.15$ 范围内随刚度的增加而增大，在 $\tilde{K} > 0.15$ 时缓慢增加并趋于稳定。

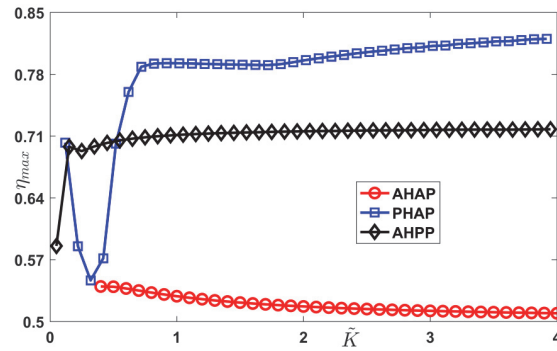


图4 不同驱动模式下最大推进效率随刚度的变化趋势

5 结论

- (1) AHPP 驱动模式下水下薄板运动的稳定性最强, AHAP 最差, PHAP 居中。
- (2) AHAP 模式下薄板的自推进效率最低; 在 $\tilde{K} < 0.15$ 和 $\tilde{K} > 0.55$ 范围内, PHAP 为最高效的推进方式; 在 $0.15 < \tilde{K} < 0.55$ 范围内, 最高效的驱动模式为 AHPP 模式。

参考文献

- 1 M.J. Lighthill, Note on the swimming of slender fish, J. Fluid Mech. 1960, 9(02): 305
- 2 M.J. Lighthill, Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion, Proc. R. Soc. B, 1971, 179(1055): 125–138.
- 3 Yao-Tsu T. Wu, Swimming of a waving plate, J. Fluid Mech., 1961, 10(03): 321
- 4 E.D. Tytell, C.Y. Hsu, T.L. Williams, A.H. Cohen, L.J. Fauci, Interactions between internal forces, body stiffness, and fluid environment in a neuromechanical model of lamprey swimming, Proc. Natl. Acad. Sci., 2010, 107(46): 19832–19837
- 5 C.L. Zhou, K.H. Low, Better endurance and load capacity: An improved design of manta ray robot (Ro Man-II), J. Bionic Eng. 7 (Suppl.), 2010: 137–144
- 6 F.E. Fish, G.V. Lauder, Passive and active flow control by swimming fishes and mammals, Annu. Rev. Fluid Mech., 2006, 38(1): 193–224.
- 7 R.J. Wootton, R.C. Herbert, P.G. Young, K.E. Evans, Approaches to the structural modeling of insect wings, Phil. Trans. R. Soc. B, 2003, 358(1437): 1577–1587
- 8 C. Tang, X.Y. Lu, Self-propulsion of a three-dimensional flapping flexible plate, J. Hydrodyn., 2016, 28(1): 1–9.
- 9 S. Heathcote, Z. Wang, I. Gursul, Effect of spanwise flexibility on flapping wing propulsion, J. Fluids Struct., 2008, 24(2): 183–199.
- 10 P.A. Dewey, B.M. Boschitsch, K.W. Moored, et al., Scaling laws for the thrust production of flexible pitching panels, J. Fluid Mech., 2013, 732: 29–46.
- 11 S. Alben, M.J. Shelley, Flapping states of a flag in an inviscid fluid: Bistability and the transition to chaos, Phys. Rev. Lett., 2008, 100(7): 074301.
- 12 S. Alben, The flapping-flag instability as a nonlinear eigenvalue problem, Phys. Fluids, 2008, 20 (10): 104106.
- 13 J. Zhang, N.S. Liu, X.Y. Lu, Locomotion of a passively flapping flat plate, J. Fluid Mech., 2010, 659: 43–68.
- 14 S.E. Spagnolie, L. Moret, M.J. Shelley, J. Zhang, Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching, Phys. Fluids, 2010, 22 (4): 041903.
- 15 N. Gravish, R.J. Wood, Anomalous yaw torque generation from passively pitching wings, in: IEEE

International Conference on Robotics & Automation, IEEE, 2016.

Locomotion of a flexible plate: How the boundary condition of the leading edge affects the self-propulsion performance

WU Wen-bo

(School of Mechanical and Electric Engineering, Guangzhou University, 510006, China

Email: wwb1987wave@gzhu.edu.cn)

Abstract: In the nature, the fish can control the wave propagation on the caudal fin using the sarcomere at the leading edge of the caudal fin. The control methods can be attributed to three types: Active Heave and Active Pitch (AHAP), Passive Heave and Active Pitch (PHAP), Active Heave and Passive Pitch (AHPP). Which mode can produce the largest thrust? Which mode can develop the most efficient swimming performance? So far, the research on these issues can't be found in article. In this paper, we have studied the self-propulsion of the flexible plates driven by these three modes. It is expected that results of this paper can shed new light on the mechanism of the locomotion of the fish, and give a new idea for the design and control of the robot fish.

Key words: Self-propulsion; Flexible plate; Driving mode; Propulsive efficiency; Propulsive force

层析水波理论核心速度假设的合理性验证研究

李明杰, 赵彬彬*, 段文洋

(哈尔滨工程大学 船舶工程学院流体力学研究所, 哈尔滨, 150001, Email: zhaobinbin@hrbeu.edu.cn)

摘要: 层析水波理论目前在波、流、地形相互作用研究方面取得了一定的进展。层析水波理论准确满足自由面边界条件, 可以对强非线性水波进行准确模拟。层析水波理论以欧拉方程为出发点, 唯一引入的假设是流体质点速度沿垂向变化的形状函数。本研究为了验证层析水波理论核心速度假设的合理性, 开展了强非线性规则波的数值模拟研究。将层析水波理论的结果与全非线性流函数波浪理论的结果进行了对比, 结果表明层析水波理论模拟的波速、波形和速度场都是非常准确的。另外, 首次对层析水波理论的压力场模拟精度进行了研究, 结果表明压力场的模拟精度也很高, 验证了层析水波理论核心速度假设的合理性。

关键词: 层析水波理论; 流函数波浪理论; 强非线性波; 规则波; 压力场

1 引言

层析水波理论又称为 Green-Naghdi 理论 (简称 GN 理论)。最开始由 Green 和 Naghdi^[1]提出并用于分析自由表面流动问题。Webster 等^[2]简化推导了有限水深下高级别的层析水波理论的形式, 使得高级别的层析水波理论可以更容易地应用到各种水波问题中。

层析水波理论没有采用摄动展开或者引入其他小参数, 准确满足自由面边界条件。在层析水波理论中, 引入的假设是流体质点速度沿垂向变化的形状函数, 对于有限水深问题而言该形状函数是多项式。根据多项式项数的不同, 层析水波理论分为不同级别, 伴随着级别的升高, 色散性能增强, 适合于更深水的情况。

近些年, 层析水波理论的研究取得了很多进展。Tissier 等^[3]提出了新的算法, 允许处理波浪破碎, 成功模拟了波浪破碎问题。Haniffah^[4]利用第一级别层析水波理论成功模拟孤立波及其相互作用、恒定深度和缓坡上的聚焦波群。Panda 等^[5]利用新的有限元方法求解层析水波理论方程, 并对波列在变化海底地形上的变形、孤立波在垂直墙壁上的反射进行了

模拟, 与实验值吻合较好。赵彬彬和段文洋^[6]给出了大量关于层析水波理论的数值模拟结果, 包括周期波, 孤立波, 不规则波等及其与地形的相互作用, 计算结果与实验值和其他理论结果吻合较好。Fang 等^[7]提出了一种混合中心有限体积和有限差分的求解方法, 模拟了孤立波传播、爬坡和相互作用。Duchene 等^[8]提出了一类改进 GN 方程的孤立波解, 将其用于孤立波模拟, 得到的结果与欧拉解吻合较好。Jalali 和 Borthwick^[9]提出了一种基于层析水波理论的浅层盆地弱非线性波晃动模型。计算结果和理论值吻合较好。Morgan^[10]利用新的方式推导了层析水波理论方程, 模拟了孤立波的碰撞及在变化海底的运动以及波和涡的相互作用。Duan 等^[11]利用层析波浪理论得到孤立波与线性剪切流相互作用的稳态解, 通过与已有理论结果的对比, 证明层析水波理论的计算结果准确。

通过以上的研究进展可以看出, 层析水波理论可以准确地对强非线性水波问题进行模拟。本研究将着重针对层析水波理论核心速度假设的合理性进行讨论, 同时将首次给出基于层析水波理论下的压力场, 通过与全非线性流函数波浪理论的对比, 进一步验证层析水波理论的核心速度假设合理性。

2 层析水波理论

层析水波理论出发点是质量守恒方程和欧拉方程, 边界条件用准确的瞬时位置的全非线性自由面条件。在层析水波理论中没有引入小参数进行摄动展开, 该理论只是对流体质点速度沿垂直方向上的变化形式进行了假设, 即:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = \sum_{n=0}^K u_n(x, t) z^n \\ w(x, z, t) = \sum_{n=0}^K w_n(x, t) z^n \end{cases} \quad (1)$$

其中, u 和 w 是水平和垂向速度, u_n 和 w_n 是未知的速度系数; K 为整数, 表示层析水波理论级别; x 和 z 表示水平和垂向位置, t 表示时间。

求垂向位置 z_0 的压力场时, 将动量守恒方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2)$$

沿垂向从 z_0 到自由面 η 积分 (自由水面压力认为是 0), 将式 (1) 代入得

$$p_z = \rho \sum_{n=0}^K \frac{\partial w_n}{\partial t} S1_p + \rho \sum_{m=0}^K \sum_{n=0}^K \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} u_n S2_p + w_m w_n S3_p \right) + \rho g(\eta - z_0) \quad (3)$$

其中, ρ 是流体密度, g 是重力加速度, 且

$$S1_p = \int_{z_0}^{\eta} z^n dz, S2_p = \int_{z_0}^{\eta} z^{m+n} dz, S3_p = \int_{z_0}^{\eta} z^{m+r+n} dz \quad (4)$$

在压力 p_z 中, $-\rho g z_0$ 是静压, 动压 p_d 为

$$p_d = \rho \sum_{n=0}^K \frac{\partial w_n}{\partial t} S1_p + \rho \sum_{m=0}^K \sum_{n=0}^K \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} u_n S2_p + w_m w_n S3_p \right) + \rho g \eta \quad (5)$$

3 数值模拟结果

为了验证层析水波理论速度假设的合理性, 对 3 种不同 kd (k 为波数) 情况下的规则波进行数值模拟。将层析水波理论计算得到的波面, 速度场和压力场与全非线性流函数波浪理论的结果进行对比。算例参数如下表 1 所示。算例 1 到算例 3 中 kd 逐渐变大, 由浅水波变化过渡到深水波, 色散性逐渐增强。算例 1 为浅水波, 相对波高 $H/d = 0.25$; 算例 2 为有限水深中的非线性波, 波陡 $H/\lambda = 0.03$ (λ 为波长); 算例 3 为深水波, 波陡 $H/\lambda = 0.03$, 3 个算例均有较强非线性。

表 1 算例参数

算例	水深 d/m	周期 T/s	波高 H/m	kd	d/λ
1	0.5	2.5	0.125	0.583	0.093
2	0.5	0.8	0.03	3.129	0.498
3	0.5	0.56	0.015	6.359	1.012

首先将 3 个算例的波面与流函数波浪理论的结果进行对比 (图 1)。从图中可以看出, 对于不同色散性算例, 层析水波理论的波面结果和流函数波浪理论的波面结果都能吻合较好, 波长和波高计算准确性较高。

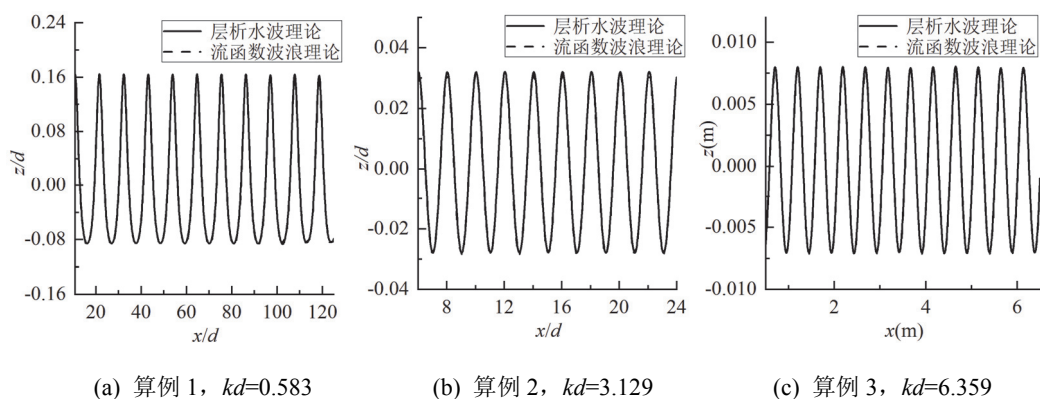


图 1 波面对比

下面展示 3 个算例的波峰处水平速度的垂向分布结果。波峰处水平速度垂向分布对比如图 2 所示。从图 2 中可以看出层析水波理论计算结果和流函数计算结果吻合较好, 证明层析水波理论可以较好地模拟规则波的速度场。

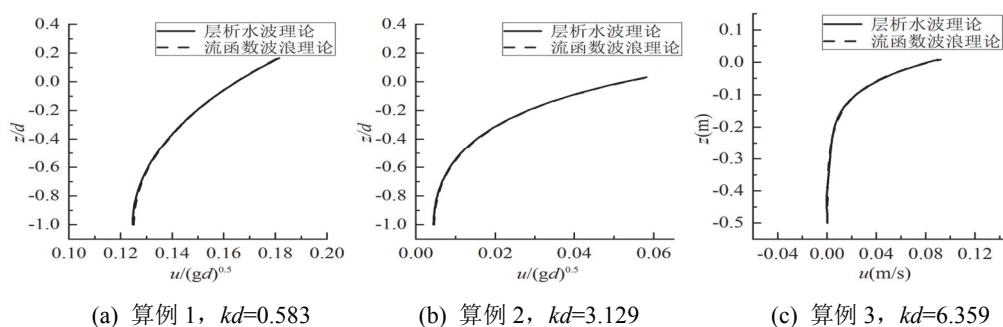


图 2 波峰处水平速度垂向分布对比

接下来将基于层析水波理论得到的在 $z = -0.05\text{m}$ 处的水平速度、垂向速度和动压力的时历结果与流函数波浪理论结果进行对比。对比结果如下图 3 所示。

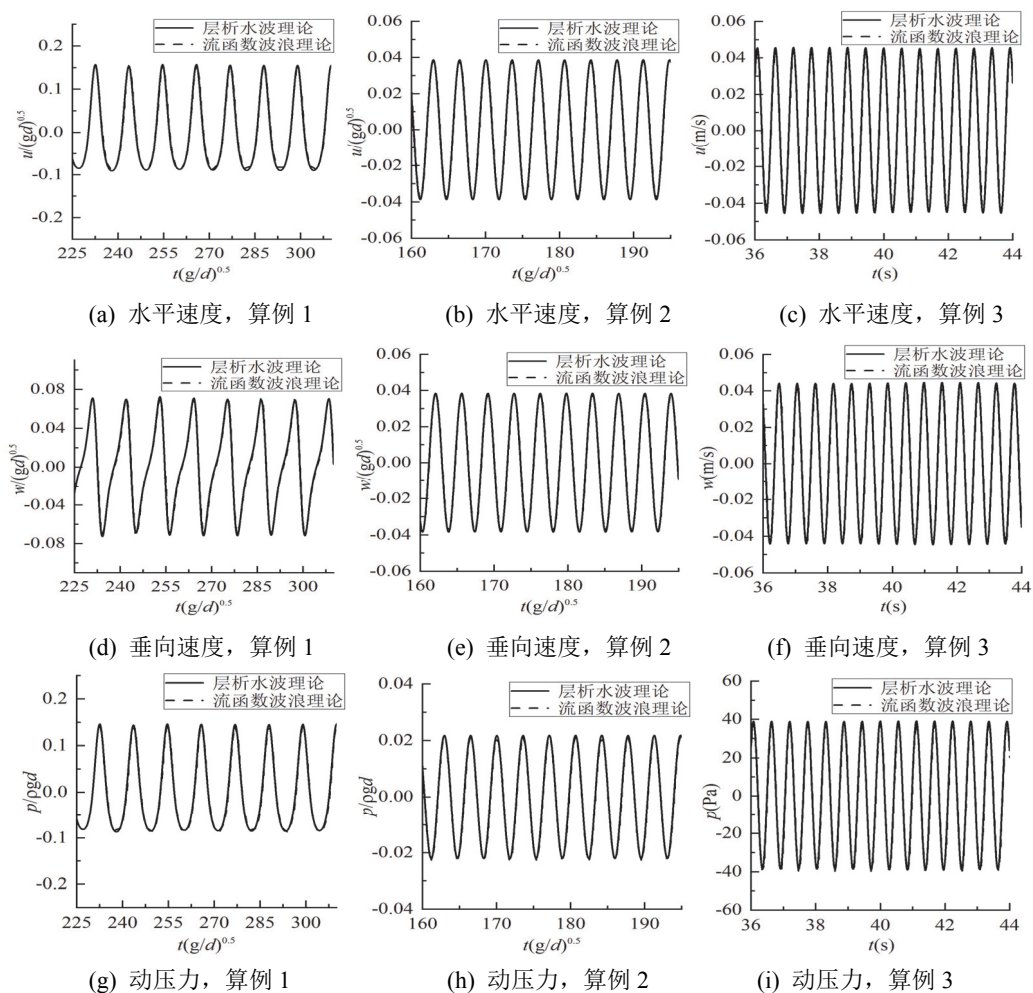


图 3 时历结果对比

从图 3 中可以看出,层析水波理论得到的时历计算结果与流函数波浪理论的结果吻合,证明层析水波理论可以很好计算模拟规则波的速度场和压力场。同时可以说明层析水波理论模拟的周期准确,前文证明了波长计算准确,即可证明层析水波理论模拟的波速准确。

4 结论

利用层析水波理论对规则波进行了模拟。首先介绍层析水波理论的速度假设,给出压力场计算方法。随后对浅水、有限水深、深水中的非线性规则波进行了数值模拟,得到波面,速度场和压力场。将层析水波理论结果和流函数波浪理论结果进行对比,结果表明层析水波理论模拟的波速、波形、速度场和压力场都非常准确,验证了层析水波理论核心速度假设的合理性。

致谢

本研究工作在国家自然科学基金(批准号:11972126,11772099)资助下完成。

参考文献

- 1 Green A.E., Naghdi P.M. Directed fluid sheets. Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences, 1976, 34(1651):447-473.
- 2 Webster W.C., Duan W.Y., Zhao B.B. Green-Naghdi theory, part A: Green-Naghdi (GN) equations for shallow water waves. Journal of Marine Science and Application, 2011, 10(3):253-258.
- 3 Tissier M., Bonneton P., Marche F., et al. Serre Green-Naghdi modelling of wave transformation breaking and run-up using a high-order finite-volume finite-difference scheme. Coastal Engineering Proceedings, 2011.
- 4 Haniffah, MRM Wave Evolution on Gentle Slopes -Statistical Analysis and Green-Naghdi Modelling. University of Oxford, 2013.
- 5 Panda N., Dawson C., Zhang Y., Kennedy, AB., Westerink, JJ., Donahue, AS. Discontinuous Galerkin methods for solving Boussinesq-Green-Naghdi equations in resolving non-linear and dispersive surface water waves. Journal of Computational Physics, 2014, 273:572-588.
- 6 赵彬彬, 段文洋. 层析水波理论. 清华大学出版社, 2014.
- 7 Fang K.Z., Jiao Z.F., Yin J., et al. A central numerical scheme to 1d Green-Naghdi wave equations. Journal of Applied Mathematics & Physics, 2015, 03(8):1032-1037.
- 8 Duchêne V., Nilsson D., Wahlén E. Solitary Wave Solutions to a Class of Modified Green-Naghdi Systems. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2018, 20(3):1059-1091.
- 9 Jalali M.R., Borthwick A. One-dimensional and two-dimensional Green-Naghdi equations for sloshing in shallow basins. Engineering & Computational Mechanics, 2017, 170(2):49-70.
- 10 Morgan A. Finite Element Exterior Calculus with Applications to the Numerical Solution of the

Green-Naghdi Equations. University of Waterloo, 2018.

- 11 Duan W.Y., Wang Z., Zhao B.B., et al. Steady solution of solitary wave and linear shear current interaction. Applied Mathematical Modelling, 2018, 60:354-369.

Research on rationality verification of the core velocity assumption in Green-Naghdi theory

LI Ming-jie, ZHAO Bin-bin*, DUAN Wen-yang

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, 150001.

Email: zhaobinbin@hrbeu.edu.cn)

Abstract: At present, some progress has been made in the study of the interaction among the wave, current and topography by use of the Green-Naghdi theory. The Green-Naghdi theory satisfies the free surface boundary condition accurately, and can simulate the strong nonlinear water wave accurately. The Green-Naghdi theory is based on the Euler's equations, and the only assumption is the shape function of the velocity of particles along the vertical water column. In order to verify the rationality of the core velocity assumption of the Green-Naghdi theory, numerical simulations of strongly nonlinear regular waves are carried out in this paper. Results of Green-Naghdi theory are compared with those of the full nonlinear stream-function wave theory. The results show that the wave speed, wave profile and velocity field are accurate. In addition, the accuracy of the pressure field of Green-Naghdi theory is studied for the first time in this paper. The results show that the pressure field is accurate, which verifies the rationality of the core velocity assumption of the Green-Naghdi theory.

Key words: Green-Naghdi theory; stream-function wave theory; strongly nonlinear water wave; regular wave; pressure field

强非线性波浪的高级别层析水波理论和高阶谱方法数值模拟精度对比研究

郑坤, 赵彬彬, 段文洋

(哈尔滨工程大学 船舶工程学院流体力学研究所, 哈尔滨, 150001, Email: duanwenyangheu@hotmail.com)

摘要: 强非线性波浪对船舶与海洋工程结构物存在巨大威胁。高级别层析水波理论和高阶谱数值模型是国际上两种比较准确高效的水波模型。高级别层析水波理论, 满足全非线性自由面条件, 只在竖直方向上引入描述不同流层间速度变化的形状函数。高阶谱方法通过保留高阶项, 并将瞬时自由面的物理量展开到静水面处, 也可以对强非线性波浪进行准确模拟。本研究分别采用这两种非线性水波模型, 对二维非线性规则波、聚焦波等不同波浪问题进行了数值模拟, 分别与全非线性流函数波浪理论和他人的聚焦波物理实验结果进行对比分析。研究发现高级别层析水波理论和高阶谱方法都能对强非线性波浪进行准确模拟, 并给出了两种水波模型的计算精度和计算耗时对比情况。

关键词: 强非线性波浪; 高级别层析水波理论; 高阶谱方法; 规则波; 聚焦波

1 引言

在强非线性波浪数值模拟方面, 目前国际上有两种比较准确高效的水波模型, 即高级别层析水波理论(HLIGN)和高阶谱数值模型(HOS)。

高阶谱方法, 它最初是由 Dommermuth 和 Yue^[1]以及 West 等^[2]分别提出的一种全非线性时域波浪传播模型。通过保留高阶项, 并将瞬时自由面的物理量展开到静水面处。Ducrozet^[3]系统地阐述了如何用高阶谱方法建立起非周期边界的数值波浪水槽(Numerical Wave Tank, NWT)。随后, 针对造波方式的改进使它更接近物理水槽的效果^[4]。Seiffert 等^[5]在 HOS 中加入了波浪破碎的考虑。

高级别层析水波理论, 这里主要指无旋高级别层析水波理论, 它是 Kim^[6]基于 Green-Naghdi 方程的思想和 Hamilton 原理得出的。Zhao 等^[7]发现第 2 级别的层析水波理论已经具有较强非线性, 而 Duan 等^[8]将级别升高到了第 8 级别, 使得它的非线性和色散性都得到增强。Zhao 等^[9]将 HLIGN 应用到了三维波浪问题, 随后又应用到了对深水强非线性聚焦波的研究中^[10], 都得到了良好的模拟效果。

尽管这两种数值波浪模型在各自快速发展, 但将他们放到一起比较的研究并不多见。本研究分别采用这两种非线性水波模型, 对二维非线性规则波、聚焦波等不同波浪问题进行

行了数值模拟，并给出了两种水波模型的计算精度和计算耗时对比情况。

2 高阶谱方法与高级别层析水波理论的异同

2.1 相同的理论背景

高阶谱方法和高级别层析水波理论都是计算波浪传播问题的高效分析方法。采用的高阶谱方法程序为法国南特中央理工大学(ECN)开发和发布的数值波浪水槽程序，即 HOS-NWT。高级别层析水波理论两大分支分别为采用有旋假设的 Green-Naghdi 波浪模型 (HLGN)和采用无旋假设的 Irrotational Green-Naghdi 波浪模型(HLIGN), 这里主要指 HLIGN 模型。该模型由 Kim^[6]基于 Green-Naghdi 模型采用 Hamillton 原理推导而来。

这两种非线性波浪模型有相同的基本假定，即流体是均匀、不可压缩、无黏无旋的理想流体。两种模型的理论方程中都保证了质量守恒，同时全非线性瞬时自由面条件也被准确满足。

2.2 高阶谱方法的核心近似

高阶谱方法将自由面速度势以波陡为参数摄动展开到 M 阶并将每一阶在自由面上的速度势在静水面处泰勒展开。为了描述自由面上垂向速度，在流场中引入特征函数来描述第 m 阶速度势（以二维问题为例）：

$$\Phi^s(x, t) = \Phi(x, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \Phi^{(m)}(x, 0, t) \quad (1a)$$

$$\Phi^{(m)}(x, z, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n^{(m)}(t) \cdot H(x, z) \quad (1b)$$

通过不断求解模态幅值 $\phi_n^{(m)}$ ，进而更新每个时刻的自由面速度势和自由面高程。对于有限水深，特征函数可以采用双曲函数来表示，

$$H(x, z) = \frac{\cosh[k_x(z+d)]}{\cosh[k_x d]} \exp(ik_x x) \quad (2)$$

高阶谱方法，采用快速傅里叶算法实现空间域和波数域的映射，有效减小了计算量。采用四阶 Runge-Kutta 方法进行时间步进。为了模拟真实物理水池造波，HOS-NWT 引入了推板和摇板两种造波方式，同时加入了时间缓冲避免了造波过程中的干扰。HOS-NWT 还在数值水槽另一端建立了消波区来减小反射，避免数值原因产生的反射^[4]。

2.3 高级别层析水波理论的核心近似

高级别层析水波理论采用流函数来描述流体流动（以二维问题为例）：

$$u(x, z, t) = \frac{\partial \psi(x, z, t)}{\partial z}, \quad w(x, z, t) = -\frac{\partial \psi(x, z, t)}{\partial x} \quad (3)$$

高级别层析水波理论采用特征函数来表征波浪中流体质点速度场的垂向特征。

$$\psi(x, z, t) = \sum_{m=1}^K \psi_m(x, t) f_m(\gamma) \quad (4)$$

式中, ψ_m 为流函数系数。 K 表示高级别层析水波理论的方程级别, 级别越高则结果越准确。在有限水深下, 特征函数为多项式形式, $f_m(\gamma) = \gamma^{2m-1} = [(z+d)/(\eta+d)]^{2m-1}$ 。高级别层析水波理论最终通过求解流函数系数和自由面的时间导数来不断更新自由面高程和速度场信息。

高级别层析水波理论通过五点中心差分方法来进行空间离散, 采用四阶 Adams-Bashforth-Moulton 预测校正格式进行时间步进。基于高级别层析水波理论的数值水槽采用波面-速度入口方式提供造波边界, 对于规则波采用全非线性流函数波浪理论来保证造波入口的信息准确, 而消波区则采用松弛法消波。

2.4 小结

由于高阶谱方法采用的快速傅立叶算法和高级别层析水波理论采用的追赶法在求解效率上都具有较高优势。这两种模型与需要求解稠密系数矩阵的其他非线性波浪模型相比计算耗时相对较低。不过, 高阶谱模型和高级别层析水波理论需要对各自核心假设中的截断阶数做收敛性分析, 如高阶谱方法中的非线性阶数和模态数以及高级别层析水波理论中的方程级别。

3 规则波数值模拟

本研究选用 HOS-NWT 程序公开的二维规则波标准算例^[11], 标准算例中带有 ECN 物理水池做的一组实验结果, 该算例基本参数如下, 为了体现该算例色散性强弱, 对 kd 也做了估算, 其中 k 和 d 分别表示波数和水深。

表 1 规则波算例基本参数

参数名称	水深 (m)	波幅 (m)	频率 (Hz)	kd
参数值	5.00	0.10	0.55	6.02

分别采用 HOS-NWT 和高级别层析水波理论对该算例进行了数值仿真。除了上表中列举的参数, 数值计算中其他重要仿真计算参数见表 2 和表 3。

表 2 规则波算例 HOS 数值参数

参数名称	造波机非线性阶数	造波机类型	x 方向模态数	HOS 阶数
参数值	3	摇板	513	3

表 3 规则波算例 HLI GN 数值参数

参数名称	高级别层析水波模型级别	空间网格尺寸	时间步长
参数值	7	$dx = \text{波长}/50$	$dt = dx/(\text{波速} * 2.5)$

经过对各自模型的收敛性分析, 计算结果对比图见图 1 和图 2, 我们还额外展示了流函数波浪理论的结果以供对比。

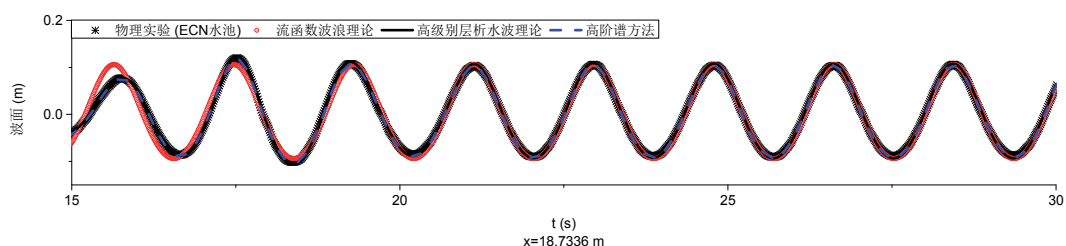
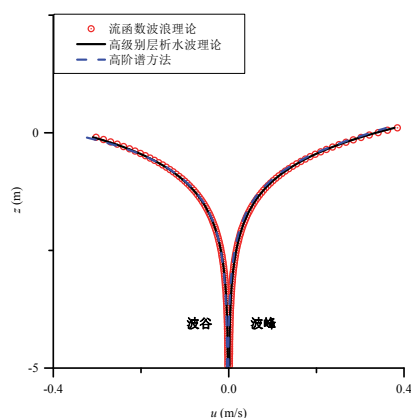
图1 $x=18.7336\text{m}$ 处波面时历

图2 波峰(谷)下流体质点水平速度垂向分布

对比发现,这3种非线性波浪理论都能与物理实验结果吻合良好。由于流函数理论是一种稳态波理论,其波型能与物理实验稳定段的结果符合。而高级别层析水波理论和高阶谱方法都是时域波浪模型,能准确捕捉波浪经过浪高仪的全部过程。而对于速度场的描述,高级别层析水波理论和高阶谱方法所得到的波峰或波谷以下的流体质点速度,均能与流函数波浪理论给出的速度场准确吻合。

4 二维聚焦波数值模拟

Baldock等^[12]在物理水槽中研究了中等水深下的二维聚焦波传播问题,他们的物理实验结果被广泛用于验证各种数值波浪模型模拟聚焦波的能力。Zhao等^[10]用高级别层析水波理论和Harmonic polynomial Cell (HPC)方法^[13]对该问题进行了数值模拟,HPC方法是Shao和Faltinsen开发的一种准确高效的全非线性势流方法。本文采用HOS-NWT程序模拟了Baldock的实验中较强非线性的宽谱和窄谱两种工况。该算例相关基本参数如下,物理实验中将输入波幅等幅值地分成29份,各波浪成分之间具有相同的周期间隔。

表 4 二维聚焦波基本参数

参数名称	水深 (m)	波幅 (m)	频率 (Hz)	kd
参数值 (宽谱算例)	0.700	0.052	[0.714, 1.667]	[1.567, 7.828]
参数值 (窄谱算例)	0.700	0.052	[0.833, 1.250]	[2.024, 4.403]

数值计算中其他重要仿真计算参数见表 5 和表 6。

表 5 二维聚焦波 HOS 数值参数

参数名称	造波机非线性阶数	造波机类型	x 方向模态数	HOS 阶数
参数值 (宽谱算例)	2	摇板	513	3
参数值 (窄谱算例)	2	摇板	257	3

表 6 二维聚焦波 HLIN 数值参数

参数名称	高级别层析水波模型级别	空间网格尺寸	时间步长
参数值 (宽谱算例)	5	$dx=\text{短波波长}/32$	$dt=dx/(\text{长波波速}*4.0)$
参数值 (窄谱算例)	5	$dx=\text{短波波长}/32$	$dt=dx/(\text{长波波速}*4.0)$

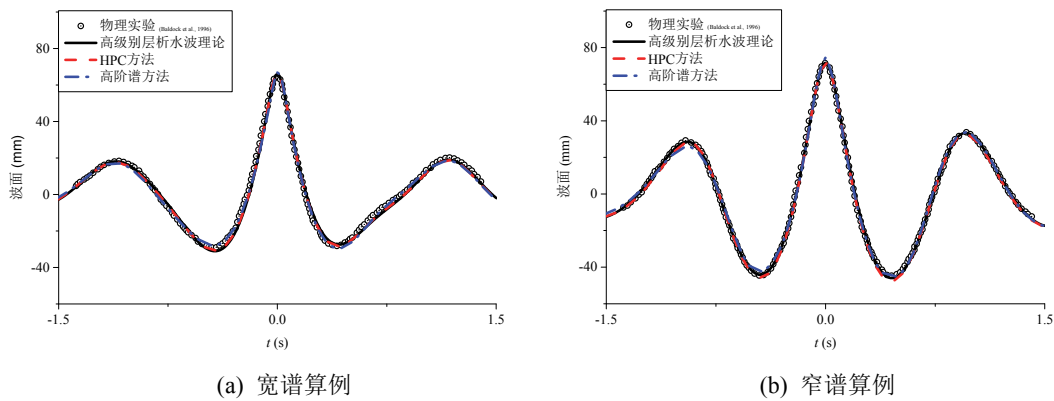


图 3 聚焦波波面时历

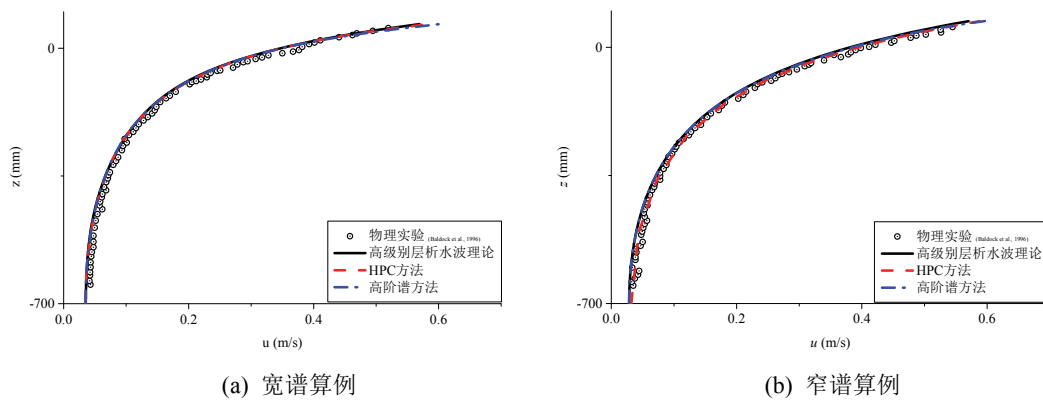


图 4 聚焦波波面下速度分布

经过对各自模型的收敛性分析,数值计算结果对比见图3和图4。对比发现,3种非线性模型数值模拟的波形和速度场分布与物理实验基本吻合。高阶谱方法和高级别层析水波理论的结果也吻合良好。

计算耗时方面,对于宽谱和窄谱算例,高级别层析水波理论耗时约101s和42s,而高阶谱方法的耗时则分别为113s和67s。两种波浪模型在计算二维波浪传播问题的计算成本基本相当。高级别层析水波理论在仿真窄谱聚焦波时的计算耗时较小,原因主要是其在模拟窄谱聚焦波时网格较稀疏。所有计算均在Windows框架下,在i7-7700HQ2.80GHz处理上串行完成。

6 结论

采用高级别层析水波理论和高阶谱方法对二维规则波和二维聚焦波进行了数值研究,并与相应物理实验进行了对比。对比发现,高级别层析水波理论和高阶谱方法对波面的模拟都很准确。计算耗时方面,高级别层析水波理论和高阶谱方法的计算耗时基本相当,均在数分钟内可以完成。

致谢

本文工作由国家自然科学基金(批准号:11772099,51679043,11972126),在此致以诚挚谢意。

参考文献

- 1 Dommermuth D G, Yue D K P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves . J. Fluid Mech., 1987, 184: 267–288.
- 2 West B J, Brueckner K A, Janda R S. A New Numerical Method for Surface Hydrodynamics . J. Geophysical Research, 1987, 92(C11): 11803–11824.
- 3 Ducroz G. Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale. Ecole Centrale de Nantes, 2007.
- 4 Ducroz G, Bonnefoy F, Touzé D L, et al. A modified High-Order Spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank . European Journal of Mechanics B/Fluids, 2012, 34: 19–34.
- 5 Seiffert B R, Ducroz G, Bonnefoy F. Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments wave breaking onset . Ocean Modelling, 2017, 119: 94–104.
- 6 Kim J W, Bai K J, Ertekin R C, et al. A derivation of the Green-Naghdi equations for irrotational flows . Journal of Engineering Mathematics, 2001, 40: 17-42.
- 7 Zhao B B, Duan W Y, Demirebilek Z, et al. A comparative study between the IGN-2 equations and the fully nonlinear, weakly dispersive Boussinesq equations . Coastal Engineering, 2016, 111: 60-69.
- 8 Duan W Y, Zheng K, Zhao B B, et al. Steady solutions of high-level Irrotational Green-Naghdi equations for strongly nonlinear periodic waves . Wave Motion, 2017, 72: 303-316.

- 9 Zhao B B, Zhang T Y, Duan W Y, et al. Application of three-dimensional IGN-2 equations to wave diffraction problems . Journal of Ocean Engineering and Marine Energy, 2019, 5(4): 351-363.
- 10 Zhao B B, Zheng K, Duan W Y, et al. Time domain simulation of focused waves by High-Level Irrotational Green–Naghdi equations and Harmonic Polynomial Cell method . European Journal of Mechanics / B Fluids, 2020, 82: 83-92.
- 11 Laboratory of Hydrodynamics, Energetics and Atmospheric Environment (LHEEA). The source of HOS-NWT . <https://github.com/LHEEA/HOS-NWT>.
- 12 Baldock T E, Swan C, Taylor P H. A laboratory study of nonlinear surface waves on water . Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 1996, 354, 649-676.
- 13 Shao Y L, Faltinsen O M, Towards efficient fully-nonlinear potential flow solvers in marine hydrodynamics, Proceedings of the ASME 31st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE2012), Rio de Janeiro, Brazil, July 1–6, 2012, 369-380.

A comparative study on simulating precision of the strong nonlinear waves by using the HLIGN equations and the HOS method

ZHENG Kun, ZHAO Bin-bin, DUAN Wen-yang*

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001.

Email: duanwenyangheu@hotmail.com)

Abstract: Strong nonlinear waves make a great threat to the ships and offshore structures. The High-Level Irrotational Green-Naghdi (HLIGN) equations and High Order Spectral (HOS) wave model are the two kinds of accurate and efficient water wave models around the world. The HLIGN equations satisfy the fully nonlinear free surface condition. It only introduces the shape function describing the velocity variation between different layers in the vertical direction. On the other hand, the HOS method which is also utilized to the simulation of the strong nonlinear waves remains the higher order terms and expands the variables on the free surface to the mean water level. In this study, these two kinds of nonlinear water wave models are used to simulate two-dimensional nonlinear regular wave, focused wave and some other wave propagating problems. The results are compared with the full nonlinear stream function wave theory and available experimental data of the focused wave. It is found that both the HLIGN equations and the HOS method can accurately simulate the strong nonlinear waves. The comparison of the calculation accuracy and time cost between these two models is given in this study.

Key words: Strong nonlinear wave; High-level Irrotational Green-Naghdi equations; High Order Spectral method; Regular wave; Focused wave.

层析内波理论色散关系研究

王战, 赵彬彬, 段文洋*

(哈尔滨工程大学 船舶工程学院, 哈尔滨, 150001, Email: duanwenyang@hrbeu.edu.cn)

摘要: 我国南海是内波的频发区, 对大幅内孤立波进行准确地描述, 将为我国南海的探索 and 开发起到至关重要的作用。高级别的层析内波理论可以准确描述大幅强非线性内孤立波的波形、波速及速度场, 但是, 在选择层析内波理论的级别时, 使用较为不便。本文使用 Mathematica 软件对高级别的层析内波理论的方程进行线性化分析, 得到了线性色散关系。通过与两层流体间内波的准确线性色散关系进行对比, 得到了不同级别层析内波理论的适用范围, 便于选择合适的层析内波理论级别, 快速得到大幅内孤立波的流场特性。通过色散关系研究, 我们发现高级别的层析内波理论对浅水模式 ($h_2/\lambda \ll 1$, $h_1/\lambda \ll 1$, 其中 h_2 及 h_1 分别代表上、下层水深, λ 为内波特征波长) 及深水模式 ($h_2/\lambda \ll 1$, $h_1/\lambda = O(1)$) 下的大幅内孤立波均能进行准确地描述。

关键词: 强非线性内波; 层析内波理论; 色散关系; 浅水模式内波; 深水模式内波

1 引言

海洋内波通常是指密度稳定层结的海洋水体内部的波动。我国南海是内波的频发区, 由于内孤立波对潜艇、离岸海洋平台及海洋立管等结构物产生巨大的威胁, 因此对内孤立波, 尤其是大幅内孤立波的波形、波速及速度场进行准确地描述, 将会为我国南海的探索 and 开发起到至关重要的作用。

对于内波问题的研究, 当密度跃层的厚度较小时, 可以将实际的内波问题简化成两层流体间的内波问题, 即上、下两层流体各自具有一种密度。此外, 当上、下两层流体间密度差异很小时, 由内波引起的自由表面的波动很小, 因此自由表面可以作刚盖近似处理^[1]。

在众多基于刚盖近似假定的内波模型中, KdV 模型虽然应用广泛, 但无法对大幅内孤立波的波形及速度场进行准确地预报^[2]。因此, 需要一些其他理论或模型对大幅内孤立波的特性进行准确地描述。

一些用于描述大幅内波的强非线性内波理论是建立在浅水模式^[3] ($h_2/\lambda \ll 1$, $h_1/\lambda \ll 1$, 其中 h_2 及 h_1 分别代表上、下层流体厚度, λ 为内波特征波长) 下的。Miyata^[4]、Choi 和 Camassa^[5]针对上、下层流体, 均采用浅水长波近似, 推导出了一类强非线性内波模型, 即 MCC (Miyata-Choi-Camassa) 模型。由于该模型形式简单, 同时没有引入小幅波

假定, 因此该模型常被用于描述浅水模式下的大幅内孤立波, 并展示了其准确性^[3]。然而在我国南海, 流体层间的厚度往往相差较大, 比如上、下层流体厚度比为 1:10 或 1:40^[6], 此时并不满足浅水模式, 因此, 需要其他强非线性内波理论对南海内波进行更准确地预报。

Choi 和 Camassa^[5]建立了深水模式^[3] (如 $h_2 / \lambda \ll 1$, $h_1 / \lambda = O(1)$) 下的强非线性内波模型, 其中上层流体采用浅水长波近似, 下层流体采用深水线性波浪理论。尽管线性波浪理论是强色散性的理论, 但却无法准确描述大幅强非线性内波, 同时该模型对于深水模式下内波的波形和速度场的描述也与欧拉解存在差别^[3]。

Zhao 等^[7]将单层层析波浪理论推广到两层层析内波理论, 并将该理论用于计算大幅内孤立波。结果表明, 无论是浅水模式还是深水模式下的大幅强非线性内孤立波, 高级别层析内波理论的结果均与欧拉解吻合的很好^[7]。然而, 针对不同工况, 层析内波理论均需要先进行级别收敛性验证, 以确保得到准确的层析内波理论的结果, 因此使用起来较为不便。比如, 需要采用 HLG-1-1 理论、HLG-2-2 理论、HLG-3-3 理论等分别对内孤立波波形、波速及速度场进行计算, 在得到了相邻两个级别一致的结果后, 即认为得到了收敛的层析内波理论的结果。

本研究动机是, 采用 Mathematica 软件, 通过对不同级别的层析内波理论的控制方程进行线性化分析, 得到线性色散关系, 并与准确解进行对比, 最终得到不同级别层析内波理论的适用范围, 从而针对某一特定的工况, 快速选择合适的层析内波理论级别, 得到准确的大幅内孤立波的流场特性。

2 层析内波理论的控制方程

假定流体不可压缩且无黏。坐标轴建立在未受扰动的内波界面处。 x 轴水平向右为正, z 轴竖直向上为正。对于上、下层流体, 质量守恒方程、动量守恒方程可写作

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1c)$$

其中, u 和 w 分别代表 x 方向和 z 方向上的速度分量, t 表示时间, ρ 表示流体密度, p 表示压力, g 表示重力加速度。

本研究考虑的是刚盖近似假定下的内波问题, 即 $z = h_2$, 其中 h_2 为未受到扰动时的上层流体厚度。此外, 内波界面表示为 $z = \eta(x, t)$, 海底表示为 $z = -h_1$, 其中 h_1 为未受到扰动时的下层流体厚度。上、下层流体密度分别为 ρ_2 及 ρ_1 (图 1)。

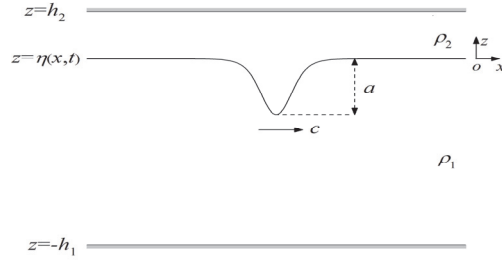


图 1 两层流体间内孤立波示意图

动力学边界条件可以写作：

$$w^U = 0 \quad z = h_2 \quad (2a)$$

$$w^U = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u^U \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad z = \eta(x, t) \quad (2b)$$

$$w^L = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u^L \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad z = \eta(x, t) \quad (2c)$$

$$w^L = 0 \quad z = -h_1 \quad (2d)$$

其中上角标 U 及 L 分别代表上、下层有关的变量。

此外，根据压力连续条件，上层流体的下表面压力 $\hat{p}^L$ 等于上层流体的下表面压力 $\bar{p}^U$ ，即：

$$\hat{p}^L = \bar{p}^U \quad (3)$$

在两层层析内波理论（HLGN 内波理论）中，速度场表示为如下形式^[7]：

$$u^U(x, z, t) = \sum_{n=0}^{K^U-1} u_n^U(x, t) z^n, \quad w^U(x, z, t) = \sum_{n=0}^{K^U} w_n^U(x, t) z^n \quad (4a)$$

$$u^L(x, z, t) = \sum_{n=0}^{K^L-1} u_n^L(x, t) z^n, \quad w^L(x, z, t) = \sum_{n=0}^{K^L} w_n^L(x, t) z^n \quad (4b)$$

其中 K^U 及 K^L 分别代表针对上、下层流体所采用的层析波浪理论的级别。式（4）中的 u_n^U 、 w_n^U 、 u_n^L 以及 w_n^L 为待求的速度系数。两层层析内波理论控制方程的具体推导见 Zhao 等^[7]。

3 层析内波理论的线性色散关系

假定内波波面 η 及水平速度系数 u_n^U 和 u_n^L 均是一阶小量，可以将二阶及二阶以上的项抛弃。以 HLGN-1-1 理论为例，可以得到

$$3 \left(\frac{\partial u_0^L}{\partial t} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial u_0^U}{\partial t} \right) + 3g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - h_1^2 \left(\frac{\partial^3 u_0^L}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho_2 h_2^2}{\rho_1 h_1^2} \frac{\partial^3 u_0^U}{\partial x^2 \partial t} \right) = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_1 \frac{\partial u_0^L}{\partial x} = 0 \quad (5b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - h_2 \frac{\partial u_0^U}{\partial x} = 0 \quad (5c)$$

假定内波波面 η 按照余弦形式变化, 即

$$\eta(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (6)$$

其中, A 为波幅, k 为波数, ω 为内波频率。将式 (6) 代到式 (5b) - (5c) 中, 可以得到

$$u_0^L(x, t) = \frac{c}{h_1} \eta(x, t) \quad (7a)$$

$$u_0^U(x, t) = -\frac{c}{h_2} \eta(x, t) \quad (7b)$$

其中, $c = \omega / k$ 为波速。将式 (7a) - (7b) 代到式 (5a) 中, 可以得到

$$c^2 = \frac{3gh_1h_2(1-\bar{\rho})}{h_2(3+h_1^2k^2) + \bar{\rho}h_1(3+h_2^2k^2)} \quad (8)$$

其中 $\bar{\rho} = \rho_2 / \rho_1$ 。式 (8) 即为 HLGN-1-1 理论的线性色散关系。

采用类似的方法, 我们得到 HLGN-2-2 理论及 HLGN-3-3 理论的线性色散关系如下:

$$c^2 = \frac{24gh_1h_2(1-\bar{\rho})}{h_2\left(74+3h_1^2k^2-\frac{500}{10+h_1^2k^2}\right) + \bar{\rho}h_1\left(74+3h_2^2k^2-\frac{500}{10+h_2^2k^2}\right)} \quad (9a)$$

$$c^2 = \frac{15gh_1h_2(1-\bar{\rho})}{h_2\left(83+h_1^2k^2-\frac{28560+1856h_1^2k^2}{420+52h_1^2k^2+h_1^4k^4}\right) + \bar{\rho}h_1\left(83+h_2^2k^2-\frac{28560+1856h_2^2k^2}{420+52h_2^2k^2+h_2^4k^4}\right)} \quad (9b)$$

更高级别的层析内波理论的线性色散关系可以用 Mathematica 软件得到。

此外, 准确的线性色散关系为^[1]:

$$c_{exact}^2 = \frac{g(1-\bar{\rho})}{k \coth(kh_1) + \bar{\rho}k \coth(kh_2)} \quad (10)$$

接下来将不同级别的层析内波理论的线性色散关系与准确解进行对比, 进而获得它们各自的适用范围。以上、下两层流体密度比为 $\rho_2 / \rho_1 = 999 / 1022$ (与 Grue 等^[2]的物理实验及数值算例相同) 为例, 分别考虑上下层厚度比为 $h_2 / h_1 = 1 / 4.13$, $1 / 10$ 以及 $h_2 / h_1 = 1 / 15$ 这三种工况(图 2)。

从图 2 中可以得到不同工况下不同级别的层析内波理论的适用范围。以图 2(a) 为例, 对于 HLGN-1-1、HLGN-2-2 以及 HLGN-3-3 理论而言, 它们可以分别针对 $kh_2 < 0.48$, $kh_2 < 1.07$ 以及 $kh_2 < 2.06$ 的内波进行准确地预报 (与理论解的误差小于 2%)。基于 Grue 等^[2]的相关物理实验, 我们可以估计出对于波幅为 $a / h_2 = -0.91$ 的内孤立波, $kh_2 \approx 1.20$, 因此 HLGN-3-3 理论可以对该内孤立波进行准确地描述, 这与 Zhao 等^[7]的结论相同。另外需要指出的是, 当 h_2 / h_1 减小, 即属于深水模式时, 大幅内孤立波本身的 kh_2 相对于浅水模式更小。通过图 2 我们发现, 高级别的层析内波理论可以对浅水模式和深水模式下的大幅内孤立波均能进行准确地描述。

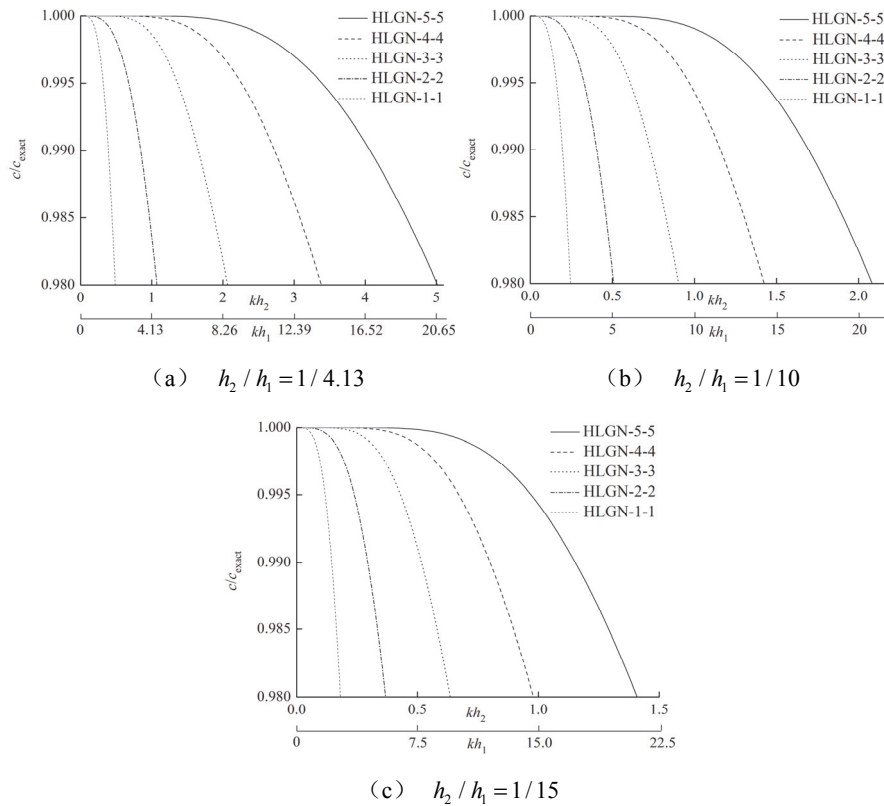


图2 不同级别的层析内波理论的线性色散关系与准确解的对比, $\rho_2/\rho_1 = 999/1022$

4 结论

通过对两层层析内波理论的控制方程进行线性化分析,应用 **Mathematica** 软件得到了不同级别的层析内波理论的线性色散关系,并与准确解进行对比,进而确定了它们的适用范围。研究表明,高级别的层析内波理论可以对浅水模式和深水模式下的大幅内孤立波均能准确地描述。

致谢

本研究工作是在国家自然科学基金(批准号: 51490671, 11572093)资助下完成。

参考文献

- 1 Lamb H. Hydrodynamics. Dover, 1932.
- 2 Grue J, Jensen A, Rusas P-O, Sveen J K. Properties of large-amplitude internal waves. Journal of Fluid Mechanics, 1999, 380: 257-278.

- 3 Camassa R, Choi W, Michallet H, Rulas P-O, Sveen J K. On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, 549: 1–23.
- 4 Miyata M. An internal solitary wave with large amplitude. *La Mer*, 1985, 23(2): 43-48.
- 5 Choi W, Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, 396: 1-36.
- 6 蔡树群等. 内孤立波数值模式及其在南海区域的应用. 海洋出版社, 2015.
- 7 Zhao B B, Ertekin R C, Duan W Y, Webster W C. New internal-wave model in a two-layer fluid. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 2016, 142(3): 04015022.

Study on dispersion relation of the Green-Naghdi internal-wave theory

WANG Zhan, ZHAO Bin-bin, DUAN Wen-yang^{*}

(College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, 150001.

Email: duanwenyang@hrbeu.edu.cn)

Abstract: South China Sea is one of the most active internal-wave regions. Accurately describing the large-amplitude internal solitary waves plays an important role of exploring and developing the South China Sea. The high-level Green-Naghdi internal-wave theory can describe the internal solitary-wave profile, speed and velocity field accurately. However, it is inconvenient to choose the level of the this theory. In this paper, the Mathematica software is used to linearize the equations of the high-level Green-Naghdi internal-wave theory and obtain the linear dispersion relation. By comparing with the exact liner dispersion relation of the internal wave in a two-layer fluid system, we obtain the application range of the different level Green-Naghdi internal-wave theory, which will help us select the suitable level for getting the large-amplitude internal solitary-wave properties. By studying the dispersion relation, we find that the Green-Naghdi internal-wave theory with high levels can describe the large-amplitude internal solitary waves accurately, both for the shallow configuration ($h_2 / \lambda \ll 1$, $h_1 / \lambda \ll 1$, where h_2 and h_1 are the depths for the upper-fluid layer and lower-fluid layer, respectively, and λ is the characteristic wavelength) and deep configuration ($h_2 / \lambda \ll 1$, $h_1 / \lambda = O(1)$).

Key words: Strongly nonlinear internal wave; Green-Naghdi internal-wave theory; dispersion relation; shallow-configuration internal wave; deep-configuration internal wave

正弦潜堤的波浪布拉格反射的 数值模拟研究

张金凤¹, 季超群¹, 郑枫², 张庆河¹

(1. 天津大学 水利工程仿真与安全国家重点实验室, 天津, 300350, Email: jfzhang@tju.edu.cn;

2. 苏交科集团股份有限公司, E-mail: zf227@jsti.com)

摘要: 波浪和潜堤相互作用会产生布拉格反射。本文基于格子玻尔兹曼方法 LBM (Lattice Boltzmann Method) 构建二维数值波浪水槽。在对数值模型进行验证的基础上, 设置多组正弦潜堤结构, 对波浪与结构物的相互作用进行研究。通过改变潜堤的相对高度, 对比研究了不同参数对布拉格反射的影响, 从而提出潜堤结构的合理建设参数。模拟结果表明, 潜堤结构的相对高度增加时, 布拉格反射现象随之增强。实际工程中为取得良好的守护效果, 应该保证潜堤高度至少为水深的一半。

关键词: 格子 Boltzmann 方法, 数值波浪水槽, 布拉格反射现象。

1 引言

波浪作为海洋环境中最主要的动力因素之一, 在从外海传播到近岸过程中会产生诸如浅水边形、破碎、折射绕射、反射等现象。潜堤作为一种常见的守护结构物, 可以削弱波浪的高度, 减弱作用于港口的波能。波浪遇到潜堤结构会发生布拉格反射共振 (Bragg Reflection Resonator), 在结构物前形成水墙, 抵挡部分波浪能量和改善堤后水动力条件^[1]。

国内外学者对潜堤与波浪作用下的布拉格反射开展了一系列研究, 研究手段大致可分为理论分析, 物理实验和数值模拟。其中物理试验更为灵活, 能够模拟不同形状和尺寸的潜堤结构。张宪国等^[2]开展物理水槽试验, 分别对矩形、三角形地形下的布拉格反射开展研究, 得出了矩形地形布拉格反射效果最强的结论。Hsu 等^[3]研究了不同潜堤数量等条件下布拉格反射强度变化。已有研究多为物理模型试验, 选择合理的新型的数学模型开展研究具有创新性的意义。

格子 Boltzmann 方法因易于并行计算等优势, 近年来逐渐成为模拟流体运动的热门方法。Thuermer^[4]提出了基于 LBM 的单相流界面追踪模型, 只模拟液相流体。Wei^[5]在 Boussinesq

模型中引入了动量源造波方法,在 LBM 中可以类似地在碰撞方程中增加源项来实现。需要指出的是,已有的开源 LBM 库如 OpenLB, LuaLB 等,其所配置的模块难以用于生成波浪数值水槽。因此,为研究波浪的布拉格反射现象,采用适用于港口海岸地区的波浪与结构物相互作用的 LBM 数学模型是有意义的。

2 数值波浪水槽模型

数值波浪水槽 NWT2D (Numerical Wave Tank2D) 是天津大学开发的 TLBE (Three-dimensional two phase Lattice Boltzmann Equation solver) 开源 LBM 程序库的子模块。TLBE 基于格子 Boltzmann 方法开发,具备网格加密、多处理器并行计算等功能,可实现对波浪传播、变形、破碎等现象以及波浪与结构物作用的精确模拟。

2.1 格子 Boltzmann 方法

Chen^[6]证明了在低马赫数条件下,格子玻尔兹曼方程 LBE (Lattice Boltzmann Equation) 同经典的 Navier-Stokes 守恒方程具有内在的一致性。玻尔兹曼方程 (Boltzmann Equation) 表示由于介观粒子的流动和碰撞而导致的粒子分布随时间和空间的变化:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = \Omega(f) \quad (1)$$

其中, $f(\mathbf{r}, \xi, t)$ 是粒子速度分布函数,表示 t 时刻在 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ 间的空间单元 $d\mathbf{r} = dx dy dz$ 中,速度在 ξ 与 $\xi + d\xi$ 间的分子数量为 $f d\mathbf{r} d\xi$ 。为对式 (1) 左端项进行离散, Qian 等^[7]提出了经典 DnQm 模型,其中 n 表示离散模型的维度, m 表示离散方向的自由度。

式 (1) 右端的碰撞项可以由 MRT (Multi-Relaxation Time) 多松弛算子替代, MRT 模型在矩空间进行松弛。矩空间中的各阶矩代表流体的性质,如密度、压强等。

2.2 弱可压 LB 方程

在常见的明渠流动和波浪运动中,流体是几乎不可压的。He 和 Luo^[8]提出了不可压缩 LB 模型,模型中密度由常密度 ρ_0 以及动态密度 $\delta\rho$ 组成。刘光威^[9-11]进行了三维 MRT 孤立波模拟,认为弱可压 MRT-LB 更适合模拟三维波浪运动。其二阶平衡态函数为:

$$f_{\alpha}^{eq} = \omega_{\alpha} \rho + \omega_{\alpha} \rho_0 \left[\frac{\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2c_s^2} \right] \quad (2)$$

2.3 自由表面模型

本文中算例均选择 VOF (Volume of Fluid) 方法刻画自由表面位置。VOF 通过求解格点单元中的液体体积与网格体积的比例关系来确定自由表面位置, ϕ 定义如式 (3):

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) = 0, \Rightarrow \text{Gas} \\ \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) = 1, \Rightarrow \text{Liquid} \end{cases} \quad (3)$$

2.4 造波与消波模块

NWT2D 中配置的造波模块包括速度入口造波、动量（质量）源造波等。本研究将速度入口造波^[12]引入到了 LBM 中。NWT2D 中配置的消波模块为海绵层消波和自然出流消波，能够有效地消除反射波的二次反射。本研究选择自然出流消波，模拟波浪的自由流出过程。

3 数值波浪水槽验证

本研究仅讨论规则波与结构物的布拉格反射效应，为验证模型的正确性，选取三阶 Stokes 波进行验证，规则波参数见表 1。

表 1 规则波参数

	波高 (m)	水深 (m)	周期 (s)	波长 (m)
Stokes III	0.04	0.2	1	1.23

3.1 波浪的传播验证

将三阶 Stokes 波的模拟结果与解析解相比较，可见 NWT2D 可以精确模拟波浪的传播。

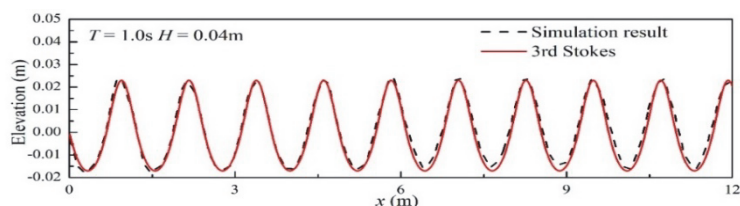


图 1 三阶 Stokes 波验证 ($T=30s$)

3.2 波浪爬坡和越浪

波浪在近岸地区传播过程中，会发生爬坡和越浪现象，甚至与滩体上的结构发生接触。图 2 展示了波浪在爬坡过程中的破碎过程，可以看出 TLBE 正确刻画了波浪传播过程中复杂的变形和破碎过程，具备正确模拟波浪与结构物相互作用过程中的形态变化的能力。



图 2 波浪在海堤上的爬坡和破碎

4 波浪与潜堤相互作用的布拉格反射研究

潜堤导致的布拉格反射的效果强弱可以用反射系数 R 作为参考：

$$R = H_{in} / H_{ref}$$

[illegible]

图 3 正弦潜堤布置图

综上所述, 强布拉格反射仅发生在峰值附近较窄的周期范围区域内, 在范围外的反射较小。且随着水深的减少, 反射系数峰值对应的无量纲波数也随之向下偏移, 说明水深的变化不仅影响布拉格反射的强度, 也会改变峰值的位置。

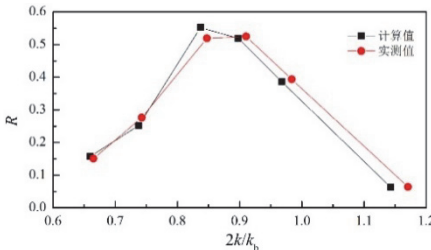


图 4 水深 0.6m 条件下的反射系数

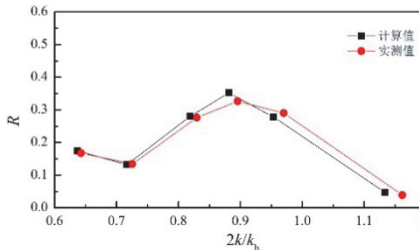


图 5 水深 0.7m 条件下的反射系数

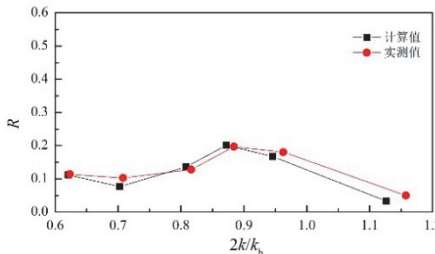


图 6 水深 0.8m 条件下的反射系数

为进一步研究该正弦地形对经过该区域波浪的消减作用,通过与计算反射系数类似的方法求解堤后的透射系数。图 7 至图 9 便为各水深条件下的透射系数比较。通过图 7 至图 9 透射系数对比图可以发现,不同水深条件下透射系数随着无量纲波数的变化趋势与反射系数类似,当反射系数较大的时候,其对应无量纲波数的透射系数则相应有所减小,这与实际物理规律相互对应。此外,当相对高度增大时,透射系数也随之减小。因此,在实际工程中,若想使系列潜堤对外海波浪起到较好的消浪效果,系列潜堤的堤高与水深的关系 D/h 至少须为 0.5。

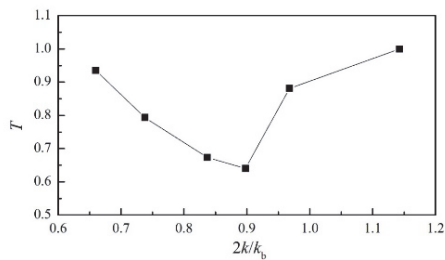


图 7 水深 0.6m 条件下的透射系数

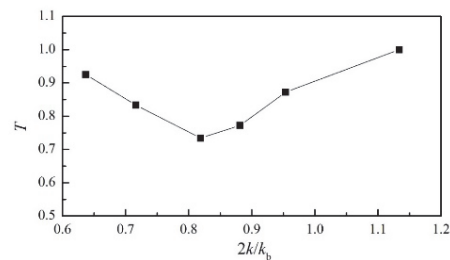


图 8 水深 0.7m 条件下的透射系数

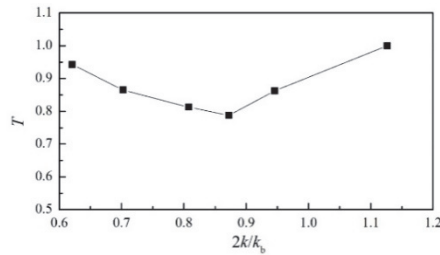


图 9 水深 0.8m 条件下的透射系数

5 结论

基于 TLBE 代码库建立了二维数值波浪水槽 NWT2D,并验证了 NWT2D 在模拟波浪与结构物相互作用方面的可行性。建立多排正弦形潜堤,研究规则波在正弦潜堤影响下的传播变化,以反射系数 R 代表布拉格反射的强弱。模拟试验结果表明,当潜堤相对高度减小时,布拉格反射现象随之衰弱。存在某个最佳无量纲波数,即在无量纲相对波数比 ($2k/k_0$) 在某个值附近时,反射系数 R 最大,潜堤结构的布拉格反射效果最好。随着相对高度的增加,反射系数峰值对应的无量纲波数也随之向下偏移,说明水深的变化不仅影响布拉格反射的强度,也会改变最佳无量纲波束的值。若想使系列潜堤对外海波浪起到较好的消浪效果,系列潜堤的堤高与水深的关系 D/h 至少须为 0.5。

参考文献

- 1 郑金海,余豪丰,陶爱峰,等.波浪布拉格共振研究进展[J].水利水电科技进展,2016,36(03): 83-87.

- 2 张宪国, 许泰文, 李逸信. 波浪通过人工沙洲之实验研究[C]. 第十九届海洋工程研讨会论文集, 台中: 台湾海洋工程学会, 2007: 242-249.
- 3 Hsu T, Tsai L, Huang Y. Bragg scattering of water waves by multiply composite artificial bars[J]. Coastal Engineering Journal, 2003, 45(02): 235-253.
- 4 Thuerey N. A Lattice Boltzmann method for single-phase free surface flows in 3D [D]. Erlangen-Nuremberg, Germany: University of Erlangen-Nuremberg, 2003.
- 5 Wei G, Kirby J T, Sinha A. Generation of waves in Boussinesq models using a source function method [J]. Coastal Engineering, 1999, 36(1): 271-299.
- 6 Chen S , Doolen G D . Lattice Boltzmann Method For Fluid Flows[J]. Ann.rev.fluid Mech, 1998, 30(1):329-364.
- 7 Qian Y, Humieres D, Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation[J]. EPL (Europhysics Letters), 1992, 17(6): 479-484.
- 8 He X, Luo L. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation [J]. Journal of Statistical Physics, 1997, 88(3-4): 927-944.
- 9 刘光威. 基于格子 Boltzmann 方法的数值波浪水槽研究[D]. 天津: 天津大学, 2018.
- 10 Liu G , Zhang Q , Zhang J . Numerical wave simulation using a modified lattice Boltzmann scheme[J]. Computers & Fluids, 2019.
- 11 Liu G W , Zhang Q H , Zhang J F . Development of two-dimensional numerical wave tank based on lattice Boltzmann method[J]. Journal of Hydrodynamics, 2020.
- 12 郑枫. 波浪与防波堤相互作用的格子玻尔兹曼模拟[D].天津大学,2018.

Numerical simulation of wave Bragg reflection of submerged sinusoidal breakwater

ZHANG Jin-feng¹, JI Chao-qun¹, ZHENG Feng², ZHANG Qing-he¹

(1.State Key Laboratory of hydraulic engineering simulation and safety, Tianjin University, Tianjin, 300350,
E-mail: jfzhang@tju.edu.cn; 2. Jiangsu Transportation Institute, Nanjing, 430000, E-mail: zf227@jsti.com)

Abstract: The interaction between wave and submerged breakwater will produce Bragg reflection. In this paper, a two-dimensional numerical wave tank is constructed based on lattice Boltzmann method (LBM). Based on the validation of the numerical model, the interaction between waves and structures is studied by setting up several groups of sinusoidal submerged breakwaters. By changing the relative height of submerged breakwaters, the influence of different parameters on Bragg reflection is compared and studied, and the reasonable construction parameters of submerged dike structure are proposed. The simulation results show that the Bragg reflection magnitude increases with the increase of the relative height of the submerged breakwater. In order to achieve good protection effect, the height of submerged dike should be at least half of the water depth.

Key words: Lattice Boltzmann method, Numerical wave flume, Bragg reflection phenomenon.

基于自由面风压扰动方法的强非线性波浪模拟

徐杨¹, 赵彬彬^{1*}, 段文洋¹, 梁辉²

(1 哈尔滨工程大学 船舶工程学院 流体力学研究所, 哈尔滨 150001

2 Technology Centre for Offshore and Marine, Singapore

通信作者邮箱: zhaobinbin@hrbeu.edu.cn)

摘要: 在波浪数值模拟中, 通常采用速度入口造波法、摇板造波法等实现造波功能。而实际海洋中, 主要是风压扰动和摩擦产生海浪。这里暂不考虑风的摩擦作用, 主要研究自由面风压扰动方法来实现造波功能。在自由面的风压扰动区内, 风压强度随空间变化形式假设为多项式变化, 通过线性波浪理论, 首先推导了相应的传递函数, 建立了波幅与风压区最大风压强度和风压区长度的关系。对于线性规则波数值模拟问题, 采用线性层析水波理论进行模拟, 并将模拟结果与线性波浪理论的结果进行对比, 证明传递函数的正确性。进而, 对强非线性规则波进行了数值模拟, 并将强非线性层析水波理论的结果与全非线性流函数波浪理论进行比较, 二者吻合良好。表明本文给出的自由面风压扰动方法来实现造波功能是有有效的。

关键词: 风压扰动; 层析水波理论; 强非线性波浪; 规则波; 流函数波浪理论

1 引言

数值波浪模拟的目的是尽可能模拟实际海洋环境。建立数值波浪水池最直观的方法就是模拟物理推板造波机的运动。贺五洲等^[0]采用边界积分方程的时间步进法, 对摇板式造波机所造二维波的波形求完全非线性解。随着造波理论研究的深入, 引入动量方程, 速度入口边界造波等方法推动了数值造波技术的发展。Miyaca 等^[0]采用速度边界造波方法, 成功生成短周期规则波。

而实际海洋中, 主要是风压扰动和摩擦产生海浪。Johnson 和 Ric^[0]在实验室中, 迫使风吹过有盖水槽来产生波浪, 并在在稳定状态下, 测量了水槽中的波浪特性。Ertekin 等^[0]研究了浅水中, 以恒定速度的脉冲启动的压力分布产生的波浪。Huang 等^[0]进行了实验室实验, 测量风生成波场的表面高度概率密度函数和相关的统计特性。Manna 等^[0]提出了有限水深中风扰动生成波浪的迈尔斯层流理论。

本文主要研究自由面风压扰动方法来实现造波功能。这里暂不考虑风的摩擦作用，通过线性波浪理论，推导相应的传递函数，建立了波幅与风压区最大风压强度和风压区长度的关系。在自由面的风压扰动区内，风压强度随空间变化形式假设为多项式变化。接着使用层析水波理论^[0]对于线性规则波和强非线性规则波进行数值模拟。

2 自由面风压扰动方法传递函数推导

假定流体为理想不可压缩流体，流动无旋，此时流场的运动可以用一个速度势 Φ 表示，并在计算域中满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

时域中的线性自由面条件

$$\frac{P - P_0}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\varepsilon = 0 \quad (z = 0) \quad (2)$$

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \quad (3)$$

底部条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -d) \quad (4)$$

我们定义：

$$\Phi = \Re[\phi \exp(i\omega t)], \quad P - P_0 = \Re[p \exp(i\omega t)], \quad \varepsilon = \Re[\zeta \exp(i\omega t)] \quad (5)$$

引入傅里叶变换及其对控制方程和自由面边界条件的逆变换，可以得到

$$-k^2 \tilde{\phi} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\rho} + i\omega \tilde{\phi} + g\tilde{\zeta} = 0 \quad (z = 0) \quad (7)$$

$$-i\omega \tilde{\zeta} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 0 \quad (z = -d) \quad (9)$$

将式（6）至式（9）重新组合得到，求解方程可以得到波面的表达式

$$\zeta(x) = -\frac{1}{2\pi\rho g} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{k\tilde{p}(k)e^{-ikx}}{k - \coth(Kd)\nu} dk \quad (10)$$

其中 $\nu = \omega^2/g$

远场波幅的表达式可以写作

$$\zeta^w(x) = \frac{i}{\rho g} \frac{K\tilde{p}(K)e^{-iKx}}{1 - [1 - \coth^2(Kd)]\nu d} \quad (11)$$

风压区采用三次压力分布方式

$$px = \begin{cases} A[1 - 3(x/L)^2 + 2|x/L|^3] & |x| \leq L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

可以得到远场波幅表达式

$$\zeta^W(x) = \frac{12A}{\rho g K^3 L^3} \frac{2 - KL \sin(KL) - 2 \cos(KL)}{1 - [1 - \coth^2(Kd)]\nu d} \quad (13)$$

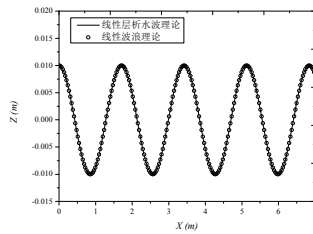
3 线性规则波数值模拟

采用层析水波理论^[0]进行自由面风压扰动兴波的数值模拟, 对线性规则波, 采用线性层析水波理论进行数值模拟, 设置两个算例, 波陡递增, 分别为 0.012, 0.047, 具体波浪参数设置见表 1。

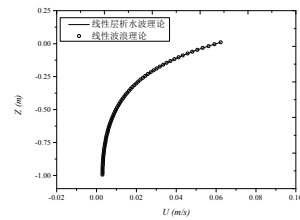
表 1 算例输入参数

算例	输入波幅 (m)	频率 (rad/s)	水深	风区长度 (m)	波长 (m)	波陡
1	0.01	6	1.0	2	1.710	0.012
2	0.035	6	1.0	2	1.710	0.047

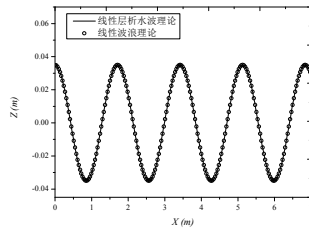
将线性层析水波理论的结果与线性波浪理论进行比较, 比较瞬时波面和波峰处的速度场(图 1)。



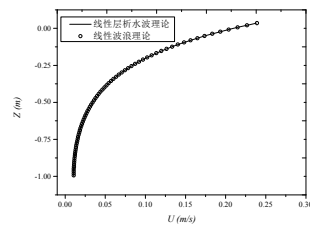
(a) 算例 1 波面对比



(b) 算例 1 速度场对比



(c) 算例 2 波面对比



(d) 算例 2 速度场对比

图 1 线性层析水波理论的结果与线性波浪理论对比

风压区公式是在线性自由面条件下得出,因此在理论上,线性层析水波理论的数值模拟结果应该与线性波浪理论一致。观察图 1 中,线性层析水波理论结果的波面与线性波浪理论结果吻合良好,波幅与输入波幅大小一致;线性层析水波理论结果的速度场与线性波浪理论结果吻合良好,由于有限水深,水底速度不为零。线性层析水波理论结果的波面和速度场与线性波浪理论结果吻合良好,证明传递函数的正确性。

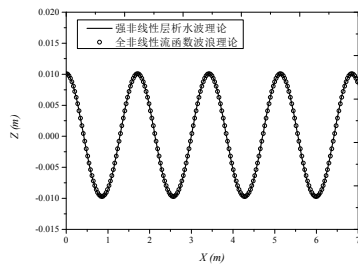
4 强非线性规则波数值模拟

本节对强非线性规则波进行了数值模拟,为保证对比一致性,与线性规则波模拟算例一致,波浪参数见表 2。由表 2 可以看出,由于是非线性,波长发生变化,导致波陡也发生变化。

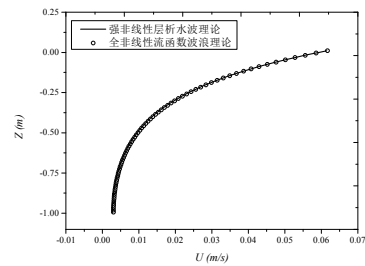
表 2 算例输入参数

算例	输入波幅 (m)	频率 (rad/s)	水深	风区长度(m)	波长(m)	波陡
3	0.01	6	1.0	2	1.712	0.012
4	0.035	6	1.0	2	1.736	0.040

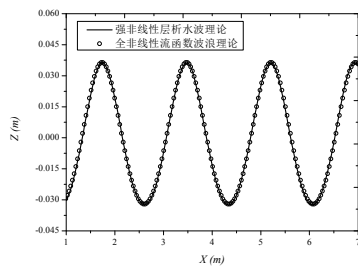
将强非线性层析水波理论的结果与全非线性流函数波浪理论^[0]进行比较,比较瞬时波面和波峰处的速度场(图 2)。



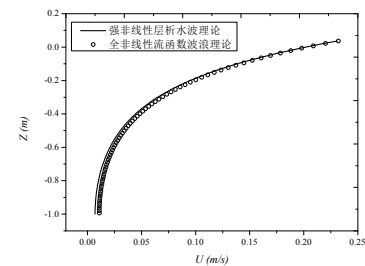
(a) 算例 3 波面对比



(b) 算例 3 速度场对比



(c) 算例 4 波面对比



(d) 算例 4 速度场对比

图 2 强非线性层析水波理论的结果与全非线性流函数波浪理论进行比较

输入波幅为 0.01m 时,波陡 0.012,非线性较弱,强非线性层析水波理论的结果波面和速度场与全非线性流函数波浪理论吻合良好;输入波幅为 0.035m 时,波陡 0.040,已处于较强非线性情况,强非线性层析水波理论的结果波面与全非线性流函数波浪理论吻合良好,二者速度场也吻合良好,说明本文给出的自由面风压扰动方法造波是有效的。

5 结论

本文主要研究自由面风压扰动方法来实现造波功能。首先通过线性波浪理论,推导了相应的传递函数,建立了波幅与风压区最大风压强度和风压区长度的关系。

然后采用线性层析水波理论对线性规则波进行数值模拟,并将模拟结果与线性波浪理论的结果进行对比,证明了传递函数的正确性。进而,对强非线性规则波进行了数值模拟,并将强非线性层析水波理论的结果与全非线性流函数波浪理论进行比较,二者吻合良好。表明本文给出的自由面风压扰动方法来实现造波功能是有效的。

致谢

本文工作由国家自然科学基金(批准号:11772099,51679043,11972126),在此致以诚挚谢意。

参考文献

- 1 贺五洲,段文洋.摇板式造波机所造二维波的完全非线性解[J].水动力学研究与进展: A 辑,1996,11(1):35-42.
- 2 Myata H, Kajitani. H, Zhu. M. Numerical Study of Some Wave -breaking Problems by a Finite Difference Meth- od [J]. The Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers, 1987 (207) : 12 - 22.
- 3 Johnson J W, Rice E K. A laboratory investigation of wind - generated waves[J]. Eos, Transactions American Geophysical Union, 1952, 33(6): 845-854.
- 4 Ertekin R C, Webster W C, Wehausen J V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 169: 275-292.
- 5 Huang N E, Long S R. An experimental study of the surface elevation probability distribution and statistics of wind-generated waves[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1980, 101(1): 179-200.
- 6 Manna M A, Latifi A, Kraenkel R A. Green-Naghdi dynamics of surface wind waves in finite depth[J]. Fluid Dynamics Research, 2018, 50(2): 025514.
- 7 赵彬彬,段文洋.全非线性深水波的 Green—Naghdi 理论研究[J].哈尔滨工程大学学报,2009(8):860-866.
- 8 Dean R G. Stream function representation of nonlinear ocean waves[J]. Journal of Geophysical Research, 1965, 70(18): 4561-4572.

Strong nonlinear wave simulation based on free surface wind pressure disturbance method

XU Yang¹, ZHAO Bin-bin^{1*}, DUAN Wen-yang¹, LIANG Hui²

(1 Institute of Fluid Mechanics, College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

2 Technology Centre for Offshore and Marine, Singapore

Corresponding author email: zhaobinbin@hrbeu.edu.cn)

Abstract: In the numerical simulation of waves, the wave-making method of velocity inlet and wave-making method are usually used to realize the wave-making function. In the actual ocean, it is mainly caused by wind pressure disturbance and friction. The frictional effect of wind is not considered here. This paper mainly studies the free surface wind pressure perturbation method to realize the wave-making function. In the wind pressure disturbance zone of the free surface, the wind pressure intensity is assumed to be a polynomial change with the spatial variation. Through linear wave theory, the corresponding transfer function is first derived, and the amplitude and maximum wind pressure intensity and length of the wind pressure area are established. For the numerical simulation of linear regular waves, this paper uses the linear Green-Naghdi fluid sheet theory for simulation, and compares the simulation results with the results of the linear wave theory to prove the correctness of the transfer function. Furthermore, the numerical simulation of the strong nonlinear regular wave is carried out, and the results of the strong nonlinear Green-Naghdi fluid sheet theory are compared with the stream function wave theory. The two agree well. It shows that the free surface wind pressure perturbation method is effective to realize the wave-making function.

Key words: wind pressure disturbance; Green-Naghdi fluid sheet theory; strong nonlinear wave; regular wave; stream function wave theory

不同雷诺数下的弦杆绕流流场分析

林海花, 孙承猛

(山东交通学院 船舶与港口工程学院, 威海 264200, Email: 7216219@qq.com)

摘要: 带有复杂齿条结构的弦杆是自升式平台桁架式桩腿的核心结构, 也是保证整座平台结构安全稳定的关键结构。弦杆环境载荷的计算通常采用半理论半经验的方法, 鲜有针对此类钝体的流场机理进行研究。设齿条与来流方向的夹角为 90° , 基于 N-S 控制方程, 探讨适合弦杆绕流流场分析的数值模拟方法, 对不同雷诺数下的二维弦杆绕流流场进行分析, 研究带复杂齿条结构的弦杆绕流流场特性, 包括尾流流场形式、升阻力系数、以及漩涡脱落频率随雷诺数的变化规律。研究结果表明: 与圆柱形结构相比, 当弦杆齿条与来流方向的夹角为 90° 时, 弦杆的尾流负压区和尾涡区域均变大, 升阻力系数也增加, 使得弦杆的绕流流场更加复杂。对弦杆绕流流场的研究分析, 为保证自升式平台的安全性提供了理论支撑。

关键词: 雷诺数; 弦杆; 齿条结构; 绕流流场

1 引言

自升式平台是海洋作业平台中应用最广泛的一类平台, 其依靠桩腿站立于海底, 桩腿承担着平台主体的重量和外部环境载荷, 对整个平台的安全性起着至关重要的作用。自升式平台桩腿的形式并不唯一, 对比于其他形式的桩腿, 桁架式桩腿具有较高的安全性和材料利用率, 在大型自升式平台中应用更为普遍。如图 1 为某自升式平台一段典型桁架式桩腿的现场实物图片, 其中, 桁架式桩腿由弦杆和撑管组成, 弦杆是主要的承力构件, 其横向尺寸远远小于其纵向尺寸, 剖面呈不规则的几何形式(图 2)。

根据学者们的大量研究^[1-2], 钝体的结构形式发生些许改变, 构件周围的流场特性将随之发生较大的改变。桩腿的弦杆由两块半圆板夹着矩形齿条焊接而成, 矩形齿条的存在使得弦杆周围的流场特性与以往学者们所研究的钝体周围的流场特性完全不同。国内外学者针对圆柱绕流、方柱绕流以及波浪圆柱绕流等^[3-5]进行了大量的研究, 但对于弦杆形式的钝体绕流, 却鲜有论文和专著公开发表, 而自升式平台桩腿的现行设计分析中, 也很少考虑涡激振动的影响, 为平台的生产作业埋下了安全隐患。基于此, 本文将自升式平台典型桁架式桩腿的弦杆为切入点, 针对其绕流机理进行研究, 为桩腿的安全可靠设计提供理论依据。



图1 某段桁架式桩腿现场

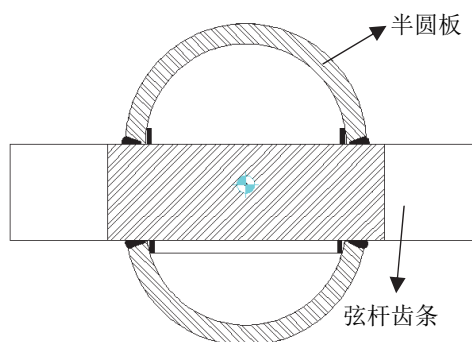


图2 桁架式桩腿弦杆剖面示意图

2 控制方程

假设海水为黏性不可压缩流体，分析过程中海水温度不变，则弦杆绕流流场的控制方程为包括质量守恒方程和动量守恒方程的 N-S 方程^[6]。质量守恒定律表述为：单位时间内流体微团中质量的增加等于同一时间间隔内流入该微团的静质量，即：

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (1)$$

动量守恒定律表述为：流体微团的动量变化率等于作用在该流体微团上的所有外力之和，则有：

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \rho g \quad (2)$$

弦杆遭遇波浪和海流的共同作用，其周围水质点的速度波动范围较大，加上弦杆结构本身的特征尺寸达到 0.5m 左右，弦杆周围流场的雷诺数 Re 可达到 10^5 以上，因而弦杆周围流场往往处于湍流状态。

处于湍流状态的流体微团，可认为随时间变化的物理量始终围绕其平均值上下脉动，即，瞬时值=时均值+脉动值，将此概念应用于动量方程中的速度项，湍流瞬时速度 u_i 表示成平均值 $\bar{u}_i$ 与脉动值 $\bar{u}'_i$ 的和，则湍流平均动量方程为：

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i - \frac{\partial \bar{u}'_i \bar{u}'_j}{\partial x_j} \quad (3)$$

其中， $\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j$ 为 Reynolds 应力。

由于 Reynolds 应力是未知量，因此，对湍流问题的求解还需建立 Reynolds 应力输运方程以及选择适当的湍流模型。

$k-\varepsilon$ 模型是能够处理具有复杂几何形体的外部绕流 RANS 模型，其中的 RNG $k-\varepsilon$ 模

型基于重整化群理论推导而来，在高速流动数值模拟上具有跟高的精度，同时能很好地模拟涡流对湍流的影响。RNG $k-\varepsilon$ 方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_\varepsilon \mu_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon + S_\varepsilon \end{cases} \quad (4)$$

其中：

$$C_{1\varepsilon} = 1.42 - \frac{\eta(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3} = 1.42 - \frac{\eta(1-\eta/4.377)}{1+0.012\eta^3}, \quad C_{2\varepsilon} = 1.68;$$

$$\eta = (2E_{ij} \cdot E_{ij})^{1/2} \frac{k}{\varepsilon}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t = \mu + \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} = \mu + 0.0845 \rho \frac{k^2}{\varepsilon};$$

式中： G_k 表示由平均速度梯度引起的湍流动能； G_b 表示由浮力引起的湍流动能； Y_M 表示可压缩湍流中波动膨胀对总耗散率的贡献； α_k 、 α_ε 是有效普朗特数的倒数，可均取为 1.39； S_k 、 S_ε 为用户定义的源项。

RNG $k-\varepsilon$ 模型适合充分发展的湍流，在近壁区，尤其是粘性底层，粘性阻尼将减少切向脉动速度，壁面也将阻止法向速度脉动，流动几乎是层流。壁面是涡、湍流的主要诱因，对近壁的处理直接影响数值模拟的结果。本文中，突变的弦杆几何产生较大的压力梯度，将导致边界层分离，因此本文选取能够有效处理类似流动状态的增强壁面函数。

3 分析模型

以某 300ft 自升式平台为例，令弦杆的特征尺寸为 D ，齿条板的厚度 $T=0.25D$ ，齿高 $H=0.303D$ ，设齿条与来流方向的夹角为 90° ，分析流域及弦杆附近网格如图 3、图 4 所示。

本文采用 Fluent 进行模拟，压力项选择 PRESTO! 格式离散，Momentum 项选择 QUICK 格式离散，对湍动能和耗散率项则选用具有绝对稳定性能的二阶迎风格式，然后选用具有无条件稳定性的全隐式积分方案在时间域上离散控制方程，最后采用 SIMPLEC 算法求解所得到的代数方程组。

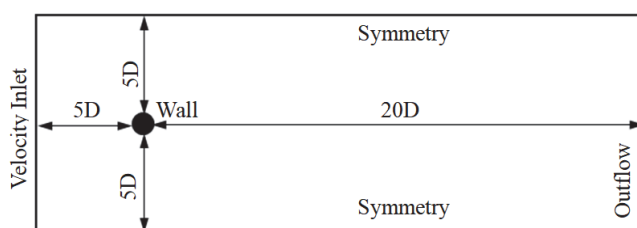


图3 流场建模范围及边界条件

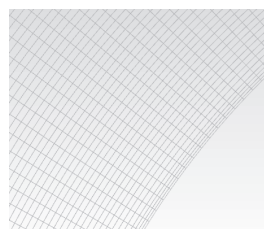


图4 流场网格

4 分析结果

水动力载荷是自升式平台的控制载荷之一，水动力载荷计算的关键是弦杆拖曳力系数 C_d ，以及规范中提及但实际工程中很少有设计者考虑的升力系数 C_l ，水动力系数 C_d 和 C_l 大小的选取直接影响到平台桩腿的设计。表 1 为所分析弦杆在 90° 来流下，不同 Re 下的 C_d 和 C_l 值。

表 1 不同 Re 下的 C_d 时均值和 C_l 最大值

Re	37	74	370	1100	11000	443050
C_d	3.796	2.932	2.373	2.619	2.706	2.556
C_l	-	-	0.321	0.651	0.836	1.171

由表 1 可知：

- (1) 在所分析的 Re 区间内，低 Re 区内，无 C_l 值，随着 Re 的增加， C_d 逐渐降低；
- (2) 当 $Re=370$ ， $C_l=0.321$ ，说明此时弦杆尾流产生了明显的涡激振荡，而在所有计算的 Re 范围内，此时的 C_d 值最小；
- (3) 随着 Re 的继续增加， C_d 值又开始增加，同时 C_l 值也增加。

由此可见，与圆柱体相比，带有齿条结构的弦杆的 C_d 和 C_l 值更大，这表明在相同的特征尺度、相同的环境条件下，弦杆受到的水动力载荷更大，这也为自升式平台桩腿的设计提出了更大的挑战。

Re 决定了弦杆的尾流场状态，弦杆的尾流场状态又决定了 C_d 、 C_l 的瞬时值，因此，不同 Re 数的 C_d 、 C_l 的时历规律也不同。图 5、图 6 分别给出了 90° 来流下， $Re=1100$ 、443050 的 C_d 和 C_l 时历曲线。

由图 5 和图 6 可知：

- (1) 当 $Re=1100$ ， C_d 和 C_l 在均值附近上下振荡，具有固定的周期性， C_d 的振荡频率为 C_l 振荡频率的 2 倍， $S_f=0.11$ ；
- (2) 当 $Re=443050$ ， C_d 和 C_l 虽然也在均值附近上下振荡， C_d 的振荡频率也近似等于

C_l 振荡频率的 2 倍, 但却不具有固定的周期性, 且振荡周期更大, S_l 约为 0.002;

(3) $Re=1100$ 时 C_d 值的振荡幅值, 也远远小于 $Re=443050$ 时 C_d 值的振荡幅值。

故, 不同 Re 下作用于弦杆的流体力区别较大, 当 $Re=1100$, 流场较为稳定, 而当 $Re=443050$, 在高 Re 数的流场条件下, 弦杆尾流场呈现高度的湍流模式。

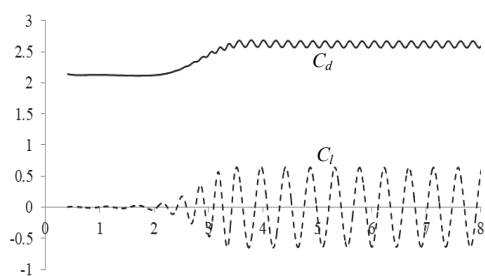


图 5 C_d 和 C_l 时历曲线 ($Re=1110$)

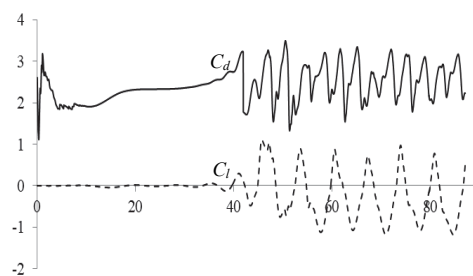


图 6 C_d 和 C_l 时历曲线($Re=443050$)

为了进一步说明不同 Re 的弦杆绕流尾流流场特征, 图 7 至图 10 分别给出了 $Re=74$ 、370、1110、443050 的弦杆绕流流场湍动能的分布云图。

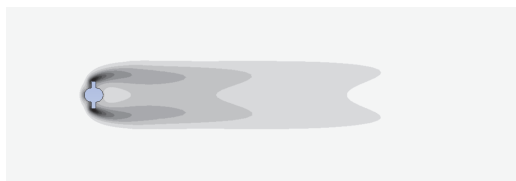


图 7 湍动能分布云图 ($Re=74$)



图 8 湍动能分布云图 ($Re=370$)

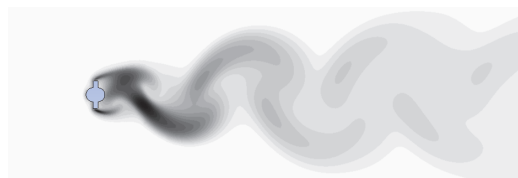


图 9 湍动能分布云图 ($Re=1110$)

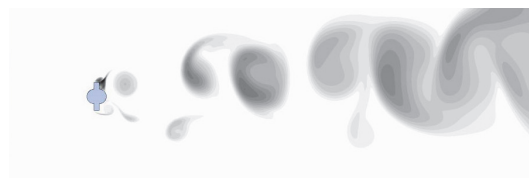


图 10 湍动能分布云图($Re=443050$)

根据以上分析结果, 可知:

(1) 弦杆齿条结构剖面为矩形, 故 90° 来流下, 在所计算的 Re 数范围内, 流动分离点始终位于齿条的尖点;

(2) 如图 7 所示, 当 $Re=74$, 弦杆后方过流断面较宽, 形成较大的低压区, 从而形成较大的 C_d 值, 在此 Re 下已经有明显的涡生成, 但涡并没有脱落;

(3) 当 $Re=370$ 、1100, 如图 8 和图 9 所示, 弦杆来流后方尾涡区变窄, 生成明显的

对称涡, 对称涡出现摆动, 呈“S”形依次向下游运动, 可观察到明显的漩涡交替脱落现象, 且 Re 增大后的涡迹更长;

(4) 当 $Re=443050$, 弦杆后方的尾流场呈完全的湍流状态, 涡的形状并不规则, 弦杆附近脱落的涡还未长大, 就迅速向下游迁移, 涡的影响域已经超出计算域;

(5) 还可以发现, 随着 Re 的增大, 脱落的涡与涡之间的距离也增加, 高 Re 的流场, 其不稳定的尾流涡的生成、迁移和消失表现为一定的随机性, 弦杆绕流流场更加复杂。

(6) $Re=443050$, 弦杆后方的尾流场呈完全的湍流状态, 能够详细观察到大涡的生成、脱落和迁移 (图 10), 甚至能够观察到较小的涡丝, 但由于采用 RANS 湍流模型进行计算, 无法捕捉到小尺度涡的生成、运动和耗散过程。

5 结语

本文对不同 Re 数下二维弦杆绕流流场进行了模拟, 根据分析结果可知, RNG $k-\varepsilon$ 模型能够较好地反映不同 Re 数下自升式平台桩腿弦杆绕流的复杂特征, 能够模拟出尾流旋涡的产生、脱落和形态的变化等。通过对弦杆绕流流场的分析总结, 不仅可丰富柱体绕流特性的研究内容, 也能够为结构物的设计和安全评估提供参考。

沿弦杆轴向齿条的存在使得弦杆几何形式沿其轴向发生变化, 弦杆周围流场呈现出强烈的三维效应^[7-8], 因此应进一步研究齿形对弦杆绕流的影响。

在条件许可的情况下, 利用高性能计算机分析研究弦杆绕流的机理问题, 结合模型试验进行论证, 可以丰富钝体绕流机理研究的成果, 对成果进行总结归纳能够使得弦杆的工程设计更加合理可靠。

致谢

感谢国家自然科学基金 (51909148)、山东交通学院攀登计划、山东交通学院校级基金 (Z201813)、山东交通学院博士科研启动基金资助。

参考文献

- 1 Alam, M.M., Meyer, J.P. Global aerodynamic instability of twin cylinders in cross flow. J. Fluids. Struct., 2013, 41: 135-145.
- 2 Lin Y F, Bai H L, Alam M M, et al. Effects of large spanwise wavelength on the wake of a sinusoidal wavy cylinder. J. Fluids. Struct., 2016, 61: 392-409.
- 3 Gustavo R.S. Assi, Peter W. Bearman. Vortex-induced vibration of a wavy elliptic cylinder. J. Fluids. Struct.,

- 2018, 80: 1-21.
- 4 谷家扬, 蒋汝斌, 渠基顺. 不同流向低质量比方形四立柱涡激运动特性研究. 船舶工程, 2015, 37(1): 40-44.
 - 5 端木玉, 万德成. 不同长细比圆柱绕流的大涡模拟. 水动力学研究与进展(A 辑), 2016, 31(3): 295-302.
 - 6 王福军. 计算流体动力学分析—CFD软件原理与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004.
 - 7 杨春蕾, 朱仁传, 缪国平, 等. 基于RANS和DES法船体绕流模拟及不确定度分析. 上海交通大学学报(自然版), 2012, 46(03): 430-435.
 - 8 赵伟文, 万德成. 用 SST-DES 和 SST-URANS 方法数值模拟亚临界雷诺数下三维圆柱绕流问题. 水动力学研究与进展(A 辑), 2016, 31(1): 1-8.

Analysis of flow field around chord under different Re

LIN Hai-hua, SUN Cheng-meng

(Naval Architecture & Marine Engineering College, Shandong Jiaotong University, Weihai, 264200.

Email: 7216219@qq.com)

Abstract: Chord with complex rack structure is the key structure of truss pile leg of jack up, and also the key structure to ensure the safety and stability of the whole platform. The method of semi theory and half experience is usually used to calculate the environmental load of chord, but the flow field mechanism of this kind of bluff body is seldom studied. Based on the N-S governing equation, a numerical simulation method suitable for the analysis of the flow field around the chord is discussed. The two-dimensional flow field around the chord with different Re is analyzed. The flow field characteristics of the chord with complex rack structure are studied, including the wake flow field form, C_l , C_d and vortex shedding frequency with Reynolds number. The results show that: compared with the cylindrical structure, when the angle between the chord rack and the inflow direction is 90° , the wake negative pressure area and wake vortex area of the chord become larger, and C_l , C_d also increase, which makes the flow field around the chord more complex. The research and analysis of the flow field around the chord provides theoretical support for the safety of the jack up.

Key words: Re ; Chord; Rack; Flow field.

射流空蚀过程噪声频谱特征研究

曹彦涛, 彭晓星, MOHAMED Farhat, 颜开

(1 中国船舶科学研究中心, 船舶振动噪声重点实验室, 无锡, 214082;

2 江苏省绿色船舶重点实验室, 无锡, 214082

3 水力机械实验室, 洛桑联邦理工学院, 瑞士洛桑, 1007)

Email: caoyantao@126.com

摘要: 空蚀是空化的危害之一, 常见于船舶推进器和水力机械等过流部件, 其出现会影响相应部件的水动力性能和结构安全性, 因此空蚀程度的评估一直备受关注。而空蚀速率与空化强度相关, 因此如何评估空化强度是空蚀程度评估的关键。本文通过在射流空蚀试验装置上加装水听器的方式, 获得材料空蚀过程噪声信号, 以探究利用噪声信号特征判断空化强度的可行性。频谱分析结果显示, 噪声特征可以反映同一温度下不同速度引起的空蚀质量损失差异, 但无法反映同一速度下、不同温度导致的空蚀质量损失差别。

关键词: 射流空化;空蚀;噪声特征

1 引言

空蚀是材料在空化冲击作用之下发生形变及破坏的过程, 其结果是导致过流部件的局部破坏, 进而影响过流部件的水动力性能及结构安全性。但空蚀过程影响因素众多, 除与流体和固体材料自身的物理特性相关之外, 还与流动的状态及材料的响应特性密不可分, 使得空蚀的实际物理过程复杂, 因而目前对空蚀物理机制的认识仍旧较为有限。

已有的研究表明, 空蚀受温度影响明显^[1-3], 但是温度对空蚀影响的机制仍旧不明确。从水动力学角度, 一般认为空蚀主要由空化溃灭产生的冲击载荷造成。但空化冲击载荷幅值极高、作用时间极短、作用面积极小, 难以有效直接测量, 因而如何利用其它物理信息反映空化冲击载荷的强弱是空蚀评估的重要途径之一。水听器由于具有响应频率高的特点, 常被用来监测空化流场的脉动信息^[4], 从而反映流场空化溃灭的强度。

本研究利用洛桑联邦理工学院(EPFL)水力机械试验室(LMH)的射流空蚀试验装置,

基金项目: 国家自然科学基金(11902295 & 11332009 & 11072223)资助

在不同速度和水温条件下开展了一系列试验，通过在试验段加装水听器的方式监测噪声信号的特征，以探索利用噪声信号特征来判断空蚀强弱的可行性。

2 试验设备及测试方法

2.1 射流空蚀试验装置

高速射流空蚀装置由主循环回路和冷却循环回路组成，其基本原理如图 1 所示。主循环回路主要通过柱塞泵在试验段上游产生高压，然后通过控制试验段上游的旁路流量来调节试验段速度，通过控制试验段下游的流量来控制试验段压力，从而调节试验段的空化数。试验段的最高速度可达 190m/s，最高速度下空化数最可在 0.015~0.025 之间调节。主循环回路上加装有过滤器，用于去除空蚀试验过程产生的固体颗粒；试验段下游安装有温度传感器，可实时监测流经试验段的水的温度。

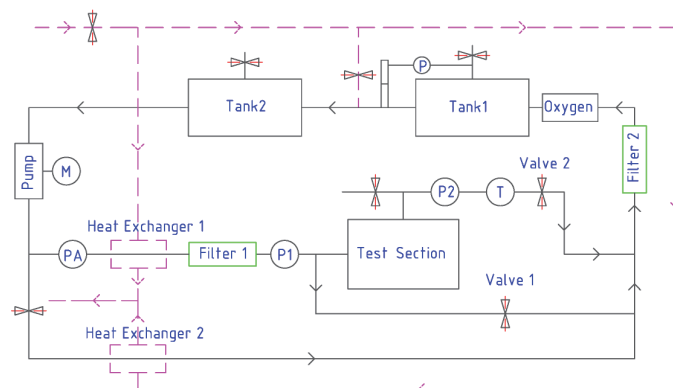


图 1 高速射流空蚀试验装置原理

试验段基本结构及原理见图 2。喷嘴中产生高速射流，喷射进入试验段腔体内形成空化，射流空化结构冲击到样本表面，并使样本表面产生空蚀。试验所用的喷嘴直径为 0.508mm。

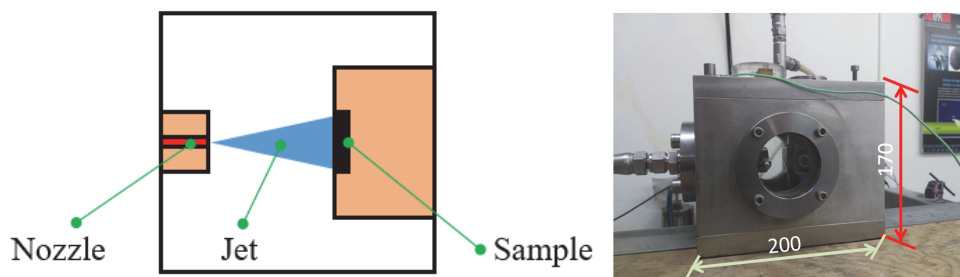


图 2 试验段原理图及实物

2.2 噪声测量装置

空化溃灭过程是一个瞬态剧烈过程，其持续时间一般认为在微妙甚至纳秒范围内，因此常规的脉动压力测量工具难以捕捉其特征。而水听器一般响应频率在上百 kHz 量级，能较为合理捕捉空化溃灭的主要特征，因此本研究中拟利用水听器的高频响特点，来研究不同状态下试验段噪声特征随试验条件的变化规律，以分析空蚀变化规律的成因。在试验段玻璃窗上固定一个装有水听器的小水箱（图 3），以记录不同工况下噪声信号的变化状况。

2.3 质量损失测量装置

为测量一定时间之后空蚀的程度，试验中采用高精度天平每隔一定时间测量样本材料的质量，从而获得材料的质量损失。SCALTEC 高精度天平（图 4），量程 0.01g~65g，分辨率 0.0001g，精度 0.001g。

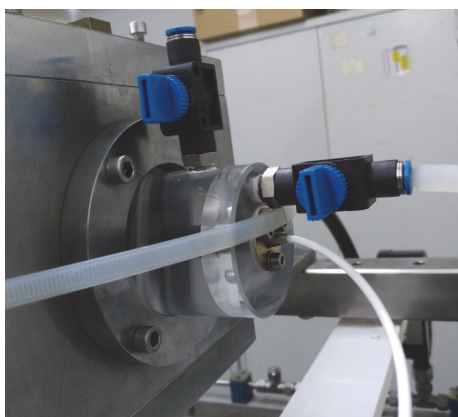


图 3 水听器安装照

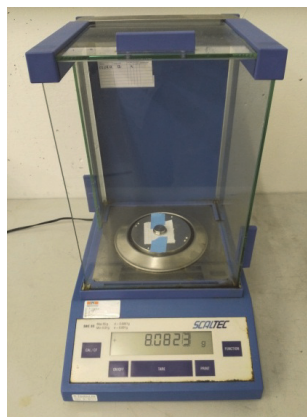


图 4 高精度天平

3 试验结果及分析

图 5 是样本表面在一定时间空蚀试验后的变化状况。射流造成的表面空蚀首先以环状形式出现，中间部分保持完好，随着持续时间的增长，中间完好部分的面积逐渐减小。环状结构表明，射流空蚀装置造成空蚀的机理是射流与周围流体之间剪切产生环状空化，环形空化结构在材料表面溃灭造成空蚀。中间圆形部分完好，说明空蚀主要由射流与流体之间的剪切层空化溃灭造成。

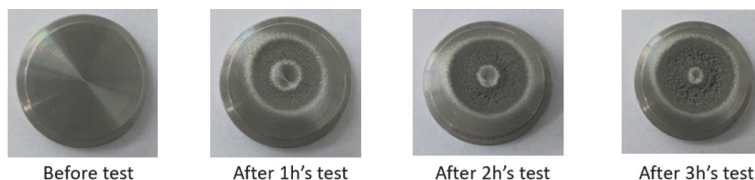


图 5 30℃条件下样本空蚀照片

3.1 同一温度和空化数、不同速度下试验结果

在 20℃ 空化数 0.02 条件下，测量了来流速度 160m/s、170m/s、180m/s 和 190m/s 时，样本 3 个小时的空蚀质量损失。结果表明，同一温度和空化数下，随着速度的提高，空蚀的累计质量损失和质量损失速率（图 6）均有明显提高。

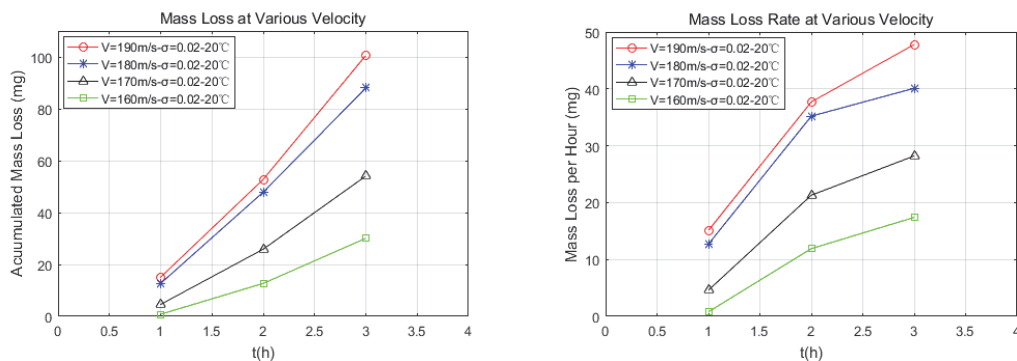


图 6 不同速度下累计质量损失及质量损失速率

而噪声频谱结果表明同一温度和空化数下，随着速度提高，测量位置的监测到的噪声频谱在中高频段明显升高（图 7），这与质量损失变化规律吻合。

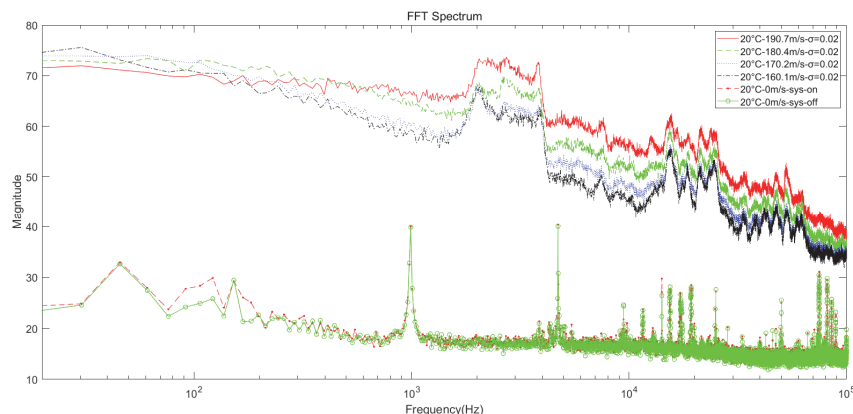


图 7 不同速度下噪声测量结果比较

3.2 同一速度和空化数、不同温度下试验结果

在速度 190m/s、空化数 0.02 条件下，测量了回路内水在 20、30 和 40℃ 时，样本三 3h 的空蚀质量损失。结果表明，在速度和空化数保持一定情况下，试验温度范围内空蚀累计质量损失和质量损失速率均随着温度增长而增大（图 8）。但是随着温度的提高，测量位置的监测到的噪声频谱的幅值未见明显升高而且还有降低趋势（图 9），这与质量损失变化规律存在一定差异。表明噪声信号可以一定程度上表征空化流场的强弱，但是对于温度引起的空蚀量增加效应，则难以反映。究其原因，可能是空蚀为局部溃灭产生的效应，而局部

高强度压力脉动在空间上急剧衰减，难以传播到测量位置。

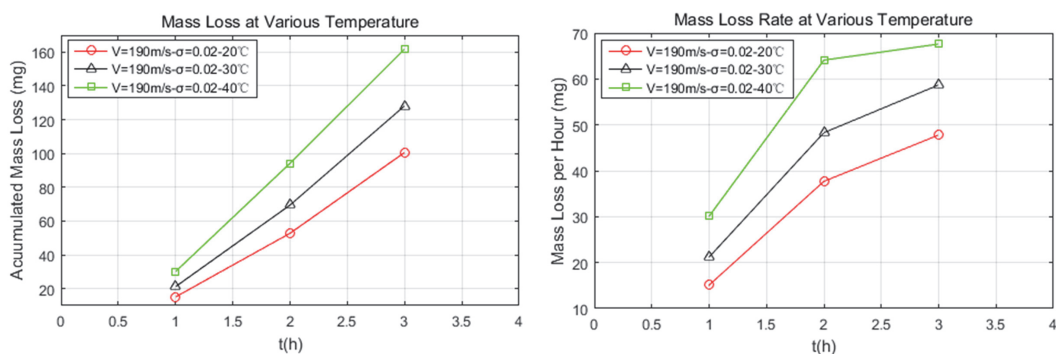


图8 不同温度下累计质量损失及质量损失速率

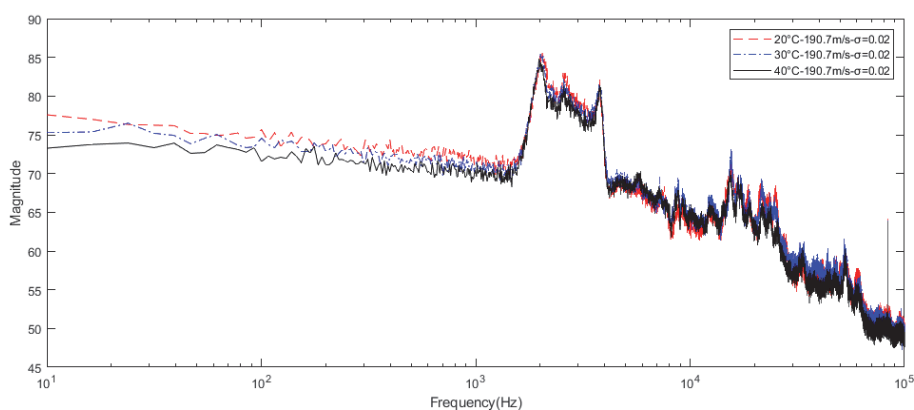


图9 不同温度下噪声测量结果比较

4 结论

本研究利用 EPFL 的射流空蚀试验装置开展了不同速度和不同温度条件下的空蚀试验，并利用水听器监测了空蚀过程试验段的噪声信号，获得如下结论：

- (1) 同一温度和空化数下，空蚀的质量损失和质量损失速率随速度的增加而增大，且试验段监测获得的噪声信号幅值在中高频段的变化规律与质量损失规律基本一致；
- (2) 同一速度和空化数下，空蚀的质量损失和质量损失速率随温度的增加而增大，但是试验段监测获得的噪声信号幅值未能反映质量损失之间的差别规律；

(3) 利用试验段加装水听器的方式所获得的噪声特征, 可以反映同一温度下不同速度引起的空蚀质量损失差异, 但无法反映同一速度下、不同温度导致的空蚀质量损失差别。

参考文献

- 1 Plesset M S. Temperature effects in cavitation damage[J]. Journal of Basic Engineering, 1972, 94:559-563.
- 2 Hickling R . Discussion: "Temperature Effects in Cavitation Damage" (Plesset, M. S. 1972, ASME J. Basic Eng. 94, pp. 559 - 563)[J]. Journal of Basic Engineering, 1972, 94(3):564-565.
- 3 Hutli E A F , Nedeljkovic M S , Radovic N A . Mechanics of submerged jet cavitating action: material properties, exposure time and temperature effects on erosion[J]. Archive of Applied Mechanics, 2008, 78(5):329-341.
- 4 Armakolas I , Carlton J , Vidakovic M , et al. The acoustic signatures of cavitation erosion on grade DH36 steel[J]. Journal of Physics Conference, 2015, 656:012109.

Acoustic spectrum of erosion process induced by cavitating jet

CAO Yan-tao^{1,2}, PENG Xiao-xing^{1,2}, MOHAMED Farhat³, YAN Kai²

(1 National Key Laboratory on ship Vibration & Noise, CSSRC, Wuxi, 214082, China

2 Jiangsu Key Laboratory of Green Ship, Wuxi, 214082, China

3 LMH, EPFL, Lausanne, 1007, Switzerland, Email: caoyantao@126.com)

Abstracts: Cavitation erosion is one of the harmful effects resulted from cavitation, which could be seen in various hydraulic components such as ship propellers and hydraulic machines. It draws attention due to its side effect on the hydraulic behavior of related components and the safety of structure. The key to evaluate extent of damage is the quantification of aggressiveness produced by cavitating flow since the relation between them. In this paper, the acoustic signal during the erosion test was obtained by a hydrophone installed on the test section of a cavitating jet device, trying to compare the cavitation intensity using the character of noise signals. It was shown that the acoustic spectrum could distinguish the mass loss difference between conditions at the same temperature but different velocity, it could not reflect the the mass loss contrast between conditions under the same velocity but different temperature.

Key words: cavitating jet; cavitation erosion; acoustic character

三维弹性楔形体在波浪条件下入水砰击的耦合求解

孙哲, 柳光军*, 李恒

(大连理工大学 船舶工程学院, 大连, 116024, Email: 19969306818@163.com)

摘要: 当船舶航行于恶劣海况时常伴随剧烈的砰击, 尤其是艏艉部位。对于航速较高的船舶, 砰击现象就更加剧烈。持续的砰击力不但会影响船舶的航行舒适性和操纵性, 也会给船舶结构带来疲劳损伤。本文通过 CFD 软件 Starccm+和有限元软件 Abaqus 双向耦合的方式对厚度为 5mm, 弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11} \text{Pa}$, 距离自由液面 0.4m 高度处的弹性楔形体自由下落砰击静水面进行数值计算。砰击压力及结构入水时的应力分布和变化规律均和文献结果吻合良好。改变弹性楔形体的入水速度, 发现入水速度对弹性楔形体入水时所受砰击力影响很大, 且随着速度增大, 砰击力增大明显。对该弹性楔形体在波浪条件下的入水砰击进行了求解, 并和静水状态下对应测点的砰击压力做了对比。发现波浪状态下对应测点的压力要小于静水中的压力。为了研究弹性效应对入水砰击的影响, 本文对厚度较小的弹性楔形体做了刚体情况下的数值对比。

关键词: 三维楔形体; 入水砰击; CFD; Abaqus; 耦合

1 引言

航行于恶劣海况的船舶, 常常伴随着频繁的首尾出水, 当船首结构从空中再次入水时与流体发生的剧烈冲击现象就是砰击。砰击的作用时间短, 但是瞬时的砰击压力很大。高频的砰击载荷作用造成了船舶结构的持续振动, 往往会引起船舶结构的疲劳破坏, 严重情况下甚至会因局部强度不够导致结构失效崩溃^[1]。此外, 海洋平台及海上栈桥等海上结构物也经常发生砰击现象。砰击问题涉及了气体、液体、固体等三相介质的相互作用。因砰击过程涉及到自由液面的破碎和飞溅现象, 砰击问题又是一种非线性的瞬态问题。对于砰击问题的研究, 经历了从二维到三维, 从线性到非线性, 从刚体到弹性体的过程。1929 年 Von-Karman 将水上飞机降落问题理想化成二维刚性楔形体垂直入水过程, 并计算了水上飞

机所受的砰击载荷。这是关于砰击问题的最早理论研究。之后, WAGNER^[2]在 Von-Karman 理论的基础上考虑了自由水面的升起现象。发展了 Von-Karman 的线性入水砰击理论, 并提出了自己的一些方法。刚体砰击问题受到了之后诸多学者的研究, 相关成熟的理论也有应用于工程实际。但是, 对于现实的砰击问题, 单纯的把结构考虑成刚体砰击忽略了结构变形对流场的影响, 会导致砰击载荷预报的不准确。对于大型海洋平台以及日渐增大的集装箱船而言, 结构弹性变形显得越来越突出, 因此考虑结构变形的弹性体入水砰击是尤为必要的。Sharov 较早的对弹性楔形体入水砰击问题进行了研究。TAKAGI^[3]忽略气垫影响对二维弹性楔形体入水砰击问题进行了理论和试验研究, FALTINSEN 基于 Wagner 的砰击理论对弹性楔形体的入水砰击问题进行了理论和试验研究^[4], 随着计算机技术的不断发展, 一大批学者基于数值计算的手段对弹性体入水砰击问题进行了研究。王江华等^[5]基于一种新的 CFD 方法动态数值模拟了二维弹性楔形结构的自由入水过程, 建立不同状态参数(结构材料属性、板厚和质量、底面斜升角和入水高度等)的弹性楔形结构自由入水模型, 研究了各参数对自由入水的弹性楔形结构的整体运动性能和局部变形响应的影响。朱加刚^[6]通过 ABAQUS 模拟了弹性楔形体冲击入水的过程并同建立的理论求解进行了对比。朱仁庆^[7]通过 fluent 数值模拟了三维弹性楔形体在波浪和静水条件下入水砰击的压力峰值以及峰值持续时间的差异。陈月^[8]通过 STARCCM+与 ABAQUS 双向耦合的方法数值求解了不同斜升角, 不同弹性模量, 以及不同厚度的钢制楔形体的入水砰击过程, 并同实验进行了对照。本文首先基于文献[7]中斜升角为 30° 的楔形体, 选取弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11} \text{Pa}$, 厚度为 5mm, 距离自由液面为 0.4m 自由下落的弹性楔形体入水砰击的工况进行了数值验证, 同样采用 STARCCM+和 ABAQUS 进行双向耦合计算, 通过对比发现, 数值模拟结果和文献及文献中实验数据对比良好。选用该斜升角楔形体模型, 分别计算了波浪和静水条件下同一下落初速度、不同下落初速度入水砰击的砰击载荷和结构响应差异。最后, 本文选用厚度较小弹性较大的楔形体为模型, 数值模拟不同入水速度下刚体和弹性体砰击差异。

2 数值模型

采用 CFD 软件 STARCCM+对楔形体入水砰击的流体载荷进行求解, 空间离散的方法是有限体积法。流场的控制方程是考虑了流体黏性的动力学基本方程, 即纳维尔-斯托克斯(N-S)方程。本文不考虑水的可压缩性, 对于流体的求解还需满足质量守恒定律推导出的连续性方程。采用 CAE 软件 Abaqus 对结构的运动进行求解, 空间离散的方法是有限单元法。由于结构在砰击过程中, 受力和运动都是瞬态的, 因此采用 Abaqus 隐式动力学分析步求解结构的运动。采用 RANS 方程基础上建立起来的 SST (Menter) K-Omega 湍流模型, 壁面处理方式是全 y^+ 。图 1 为楔形体的二维视图以及各方向尺寸。其中测点 p1,p2,p3,p4,p5 布置在楔形体垂直于 x 轴向横剖面内, 0 位于该横剖面与楔形体中纵剖面交点, p1 与中纵剖面垂向距离为 15mm, 之后各测点之间的垂向距离都为 30mm。波浪参数见表 1。

表 1 一阶斯托克斯波

λ/m	A/m	T/s	k	$c/m*s-1$
1.05	0.02	0.82	7.66	1.28

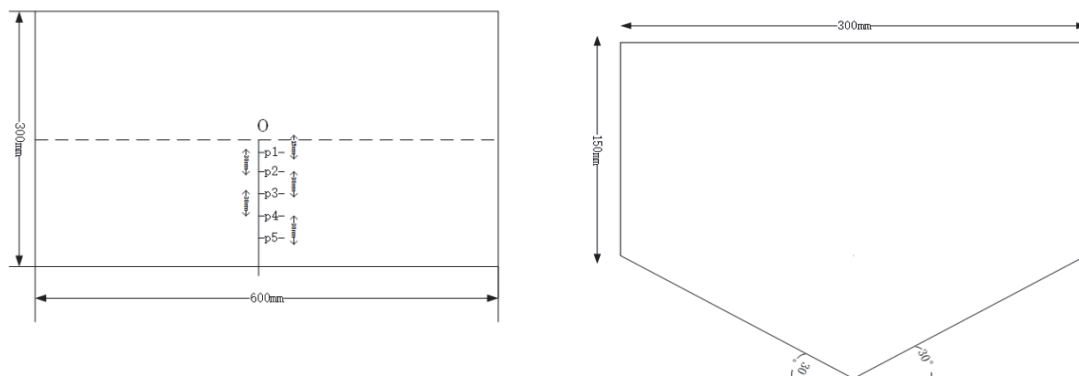


图 1 楔形体二维视图和尺寸大小

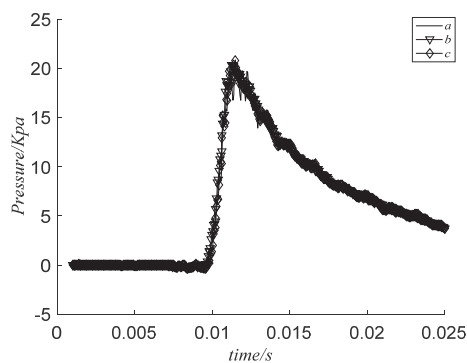


图 2 三套网格计算结果

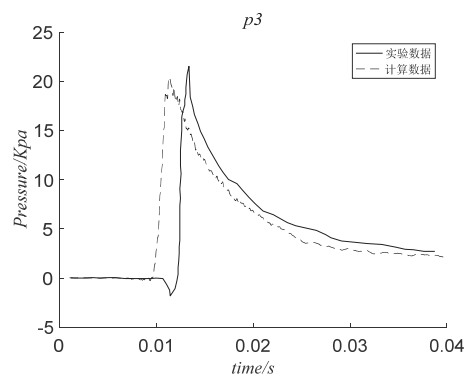


图 3 文献[8]实验数据和本文计算数据对比

3 数值方法验证

3.1 问题描述

对文献[8]厚度为 5mm, 弹性模量 $E=2.1e11pa$, 距离自由液面 0.4m 高度处的弹性楔形体入水砰击静水面进行数值计算, 对比文献中实验数据和本文数值仿真的数据, 验证了本文数值方法的正确性。

3.2 网格无关性验证

通过控制网格基础尺寸控制了全局网格尺寸, 定义三套网格基础尺寸为 0.011m、0.015m 和 0.021m, 得到三套网格 a、b、c, 网格数分别为 300 万、700 万和 1500 万。本文

选用的网格为 b，图 2 为 a、b、c 三套网格计算结果的对比曲线。由图可知 a、b、c 曲线几乎重合，只是网格尺寸较大的 a 网格在峰值区域震荡明显一些，a、b、c 在 p3 测点峰值差异极小。

3.3 验证结果

图 3 为文献^[8]中的实验数据和本文计算结果的对比，文献实验数据 p3 测点压强时历曲线震荡剧烈，为了数据的对比，本文对实验数据 p3 测点的压强时历曲线做了平均处理。本文数值计算结果和文献实验数据在 P3 峰值大小上误差在 10%以内，但是相位存在些许差别，考虑到本文数值计算模型和实验模型的误差以及测点布置的差异，本文计算结果是相对可靠的。

4 弹性楔形体在波浪和静水砰击下的计算结果

4.1 同一弹性楔形体、同一下落初速度

弹性模量 $E=2.1e11\text{pa}$ ，楔形体厚度 $t=5\text{mm}$ ，下落初速度 $V_0=10\text{m/s}$ 。楔形体最低端距离平均自由水面 0.02m ，分别在静水、波浪两种工况下进行计算。波浪参数见表 1。图 4 为波浪下楔形体砰击的测点压强时历曲线，图 5 为两种工况下测点 p1 的压强时历曲线对比。图 6 至图 9 分别为静水和波浪条件下垂向砰击力达到峰值附近时的自由液面等值面云图和压力云图，图 10 为两工况下最大应力处 *mises stress* 时历曲线，图 11 为垂向砰击力时历曲线。

(1) 通过图 4 可知弹性楔形体在波浪水面入水砰击过程中，测点 p1 至 p5 先后迅速出现压强峰值后又快速下降，且砰击压强的最大值出现在 p1 测点，静水面砰击测点压强变化趋势与波浪下一致。

(2) 应力峰值出现的时间与垂向砰击力峰值出现的时间吻合，波浪状态下的应力峰值小于静水中的，且应力峰值出现的时间滞后于静水状态下，这是由于波浪的存在，改变了楔形体周围的水质点空间分布。且波浪状态的存在使得整个应力曲线更加平稳，而静水状态的则出现一定的波动，这可能是因为波浪改变了楔形体在入水过程中的射流状态，使得楔形体的受力更加均匀。

(3) 通过观察静水状态下楔形体入水的结构响应动画，发现在楔形体刚入水的时候，入水底端部分应力迅速增大，之后最大应力出现的部位有向底部两侧和顶端转移的现象，随着入水的深度的增大，最大应力再次出现在底部顶端，并且最大应力峰值更大。

(4) 波浪工况下， $t=0.0065\text{s}$ 附近，楔形体所受垂向砰击力达到峰值，此时射流已经发生，处于波峰处的左端和处于波谷处的右端均入水，楔形体底部砰击面右端靠近波谷的地方压强较大；静水工况下， $t=0.005\text{s}$ 附近，楔形体所受垂向砰击力达到峰值，底部尖端以上区域压强较大，且压强较大区域沿着砰击底面纵向分布一致，静水面砰击的垂向砰击力达到峰值时，楔形体表面压强较大区域大于波浪水面砰击条件下的区域且静水面砰击在 $t=0.005\text{s}$ 垂向砰击力达到峰值时未发生明显射流现象，波浪的存在使得垂向砰击力峰值延迟。

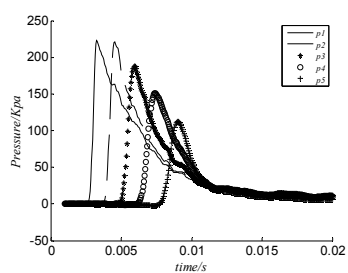


图 4 波浪条件下测点压强时历曲线

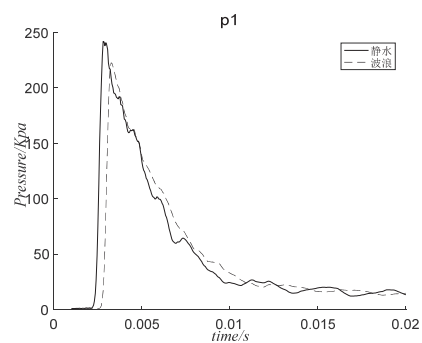


图 5 两工况下 p1 压强时历曲线

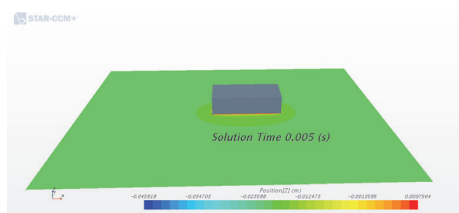


图 6 静水面自由液面等高图

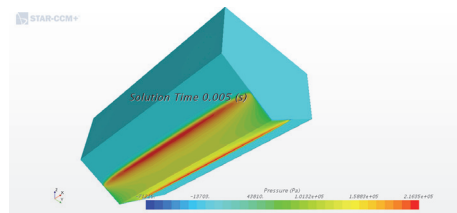


图 7 静水面砰击压力云图

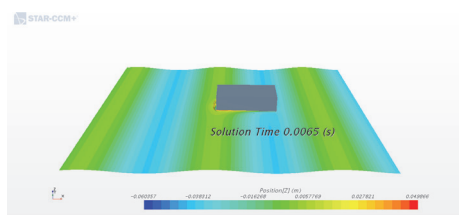


图 8 波浪水面自由液面等高图

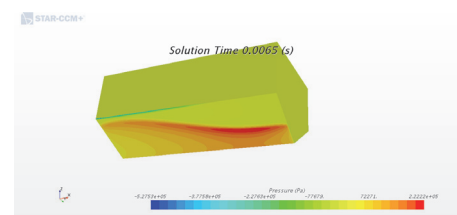


图 9 波浪水面砰击压力云图

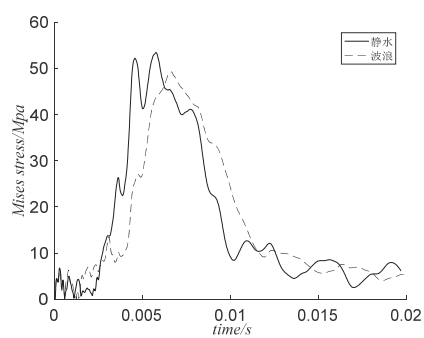


图 10 Mises stress 时历曲线

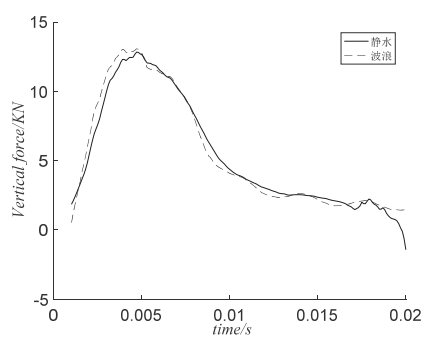


图 11 垂向砰击力时历曲线

4.2 基于 4.1 弹性楔形体、不同下落初速度

基于 4.1 的弹性楔形体，改变下落初速度，图 12 至图 14 分别为测点压强峰值、垂向砰击力峰值和 Mises stress 峰值随下落初速度变化曲线的对比。

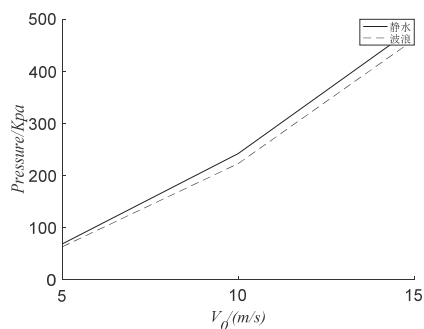


图 12 测点压强峰值对比

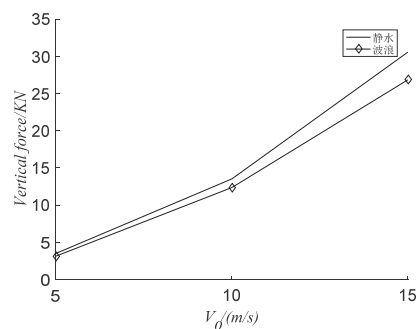


图 13 垂向砰击力峰值对比

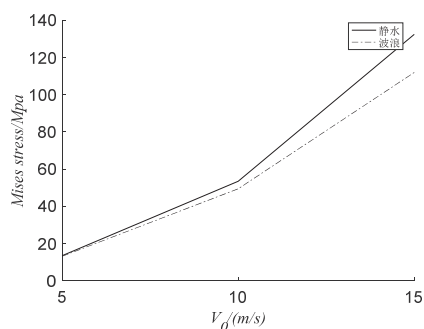


图 14 Mises stress 峰值对比

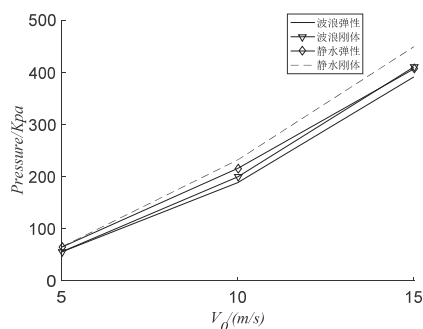


图 15 刚体和弹性体测点压强峰值对比

(1) 随着下落初速度 V_0 的增大，弹性楔形体的测点砰击压强峰值、垂向砰击力峰值和结构响应的 Mises Stress 峰值均明显增大。静水条件下的各峰值均高于波浪条件下，且随着入水速度的增大，两者的差值也逐渐增大。

5 弹性楔形体与刚体的数值模拟结果对比

等质量、不同下落初速度的刚体和弹性楔形体，弹性楔形体厚度为 2mm，质量为 8.34kg，弹性模量 $E=2.1 \times 10^{11} \text{Pa}$ ，泊松比 $\nu=0.3$ 。以不同入水初速度 V_0 自由下落的刚体和弹性楔形体入水砰击静水面和波浪水面，图 15 为刚体和弹性体测点压强峰值随下落速度的变化曲线。

(1) 无论是刚体还是弹性体，静水中测点砰击压强峰值均高于波浪条件下。

(2) 随着速度的增大，砰击压强峰值不断增大，刚体砰击压强峰值始终大于弹性体，

下落初速度较小时刚体和弹性体砰击压强峰值差距较小,随着下落初速度的增大,刚体和弹性体砰击压强峰值的差值迅速增大。这是因为对于 2mm 厚度的弹性楔形体,弹性程度比较大,当速度较小时,弹性楔形体整体受到的砰击力也比较小,楔形体变形较小,弹性作用效果相对没有那么明显。随着入水速度的增大,弹性楔形体受到的砰击力迅速增大,变形明显,从结构求解反馈回来的变形位移明显改变了流场的物理量,使得刚体和弹性体求解的压强峰值差异增大。

6 结语

通过本文的数值计算,可得到如下结论:①楔形体在入水砰击过程中,波浪条件下测点压强峰值和垂向砰击力峰值要小于静水中,波浪的存在在一定程度缓和了砰击的激烈程度,同时也使得楔形体受力更加均匀。②入水速度对砰击力的影响很大,当结构弹性较大且入水速度大时,单纯使用刚体简化来预报楔形体的入水砰击会与真实结果差异过大。

参考文献

- 1 刘晖. 变刚度楔形体入水试验仿真研究[D].武汉理工大学,2012.
- 2 WAGNER H. ber Stoss-und gleitvorgnge an der oberfl che von flüssigkeiten[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1932, 12(4):193-235.
- 3 TAKAGI K. Influence of elasticity on hydrodynamic impact problem[J]. Journal of the Kansai Society of Naval Architects, 1994, 222:97 - 106.
- 4 FALTINSEN OM. Water entry of a wedge by hydroelastic orthotropic plate theory [J]. J-Oural of Ship Research, 1999, 43(3):180-193.
- 5 王文华,黄一,王言英,等.弹性楔形体各状态参数对入水运动性能的影响[J].船舶力学,2014, 18(11): 1320-1330.
- 6 朱加刚. 船底结构砰击时的水弹性分析[D].哈尔滨工程大学,2006.
- 7 朱仁庆,陆嘉文,纪仁玮,等.波浪作用下三维楔形体入水砰击数值模拟[J].舰船科学技术,2019,41(13):6-11.
- 8 陈月. 基于 VOF 法的波浪砰击载荷下大型船体结构耦合响应研究[D].江苏科技大学,2019.

The coupling solution of three dimensional elastic wedge under wave condition

SUN Zhe, LIU Guang-jun^{*}, LI Heng

(School of Naval Architecture, Dalian University of Technology, Dalian, 116024.

Email:19969306818@163.com)

Abstract: When the ship sailing in bad sea conditions is often accompanied by severe slamming, especially in the bow and stern. For ships with high speed, the phenomenon of slamming is more severe and continuous slamming force will not only affect the ship's navigation comfort and handling, but also bring fatigue damage to the ship structure. In this paper, a two way coupling method between CFD software STARCCM⁺ and FEM software ABAQUS was used to calculate a elastic wedge. The thickness of the elastic wedge is 5mm, and the elastic modulus $E=2.1 \times 10^{11} \text{Pa}$, the wedge free fall 0.4m distance and slamming the still water. slamming pressure, stress distribution and variation are in good agreement with the literature. Changing the velocity of the elastic wedge, found that the velocity magnitude has a great influence on the impact force of the wedge. With the increase of velocity magnitude, the slamming force increases obviously. The water entry of the wedge under wave conditions is solved and pressure values of the measuring point under static water condition are compared. It is found that the pressure value under wave is less than static water. In order to study the influence of elasticity on the wedge water entry problem, we did the calculation for the rigid body case as a contrast to a wedge of relatively small thickness.

Key words: 3D- wedge; water entry slamming; CFD; abaqus; fluid solid coupling