

基于高阶谱方法的不规则波数值模拟的参数研究

杨晓彤，庄园，万德成*

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院 海洋工程国家重点实验室 高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 200240, *通讯作者 Email: dcwan@sjtu.edu.cn)

摘要: 基于高阶谱 (HOS) 方法的数值水池可以快速生成与传播波浪, 旨在研究基于高阶谱方法的 HOS-ocean 求解器在进行数值波浪模拟过程中, 高阶谱参数 M 对计算结果精度和计算时间的影响, 以及输出频率 f 对输出波形数据完整性和计算时间的影响, 验证了基于高阶谱方法进行不规则波数值模拟的适用性, 为后期合理选择相应参数提供了参考。

关键词: 高阶谱方法; 聚焦波; 不规则波; 参数研究

1 引言

高阶谱 (High-Order Spectral) 方法是由 West 等^[1]和 Dommermuth 等^[2]提出的模拟非线性重力波的方法, 其通常使用大量的自由波模式, 通过对非线性波自由表面条件进行伪谱处理来确定非线性波的振幅演化。基于高阶谱方法, Ducrozet 等^[3]开发了在开阔海域演化非线性波的开源求解器 HOS-ocean。Song 等^[4]在 HOS-ocean 求解器中扩展引入了 ITTC 双参数谱以及聚焦波, 对 ITTC 双参数谱进行了波谱分析, 对聚焦波进行了数值模拟, 并且对多向不规则波进行了畸形波研究。Zhuang 等^[5]将 HOS 方法和 CFD 方法耦合, 并基于此做了 2D、3D 规则波和不规则波的模拟验证。宋家琦^[6]应用此耦合方法对 2D、3D 规则波和不规则波进行模拟, 并对势流模型中的多向不规则波的聚焦模拟以及长时间模拟后极端波浪海况在耦合模型中进行重构。

基于高阶谱方法, 对多向不规则波中的特殊波浪聚焦波进行了数值模拟, 分别考虑了不同的高阶谱参数 M 和输出频率 f 对计算精度、输出精度、计算时间的影响, 给出了聚焦波在聚焦时刻附近 4 个时刻下的全场波高云图和聚焦位置附近的波高云图, 并给出了不同参数选择下在聚焦位置的波高时历曲线, 以探讨对计算精度、输出精度和计算时间的影响。

2 高阶谱方法介绍

假定流体为不可压、无黏、有势无旋的理想流体, 且不考虑流体表面张力, 坐标系建立在静水面, z 轴正方向竖直向上, 则势流流场的控制方程为:

$$\nabla^2 \Phi(x, z, t) = 0 \quad (1)$$

在自由面 $z = \eta(x, t)$ 处的动力学边界条件和运动学边界条件分别是 (2a) 和 (2b):

$$\Phi_t + gz + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 = 0 \quad (2a)$$

$$\eta_t + \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \Phi = \Phi_z \quad (2b)$$

其中, $\nabla_x \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 为水平梯度

定义表面速度势 $\Phi^s(x, t)$ 为:

$$\Phi^s(x, t) = \Phi(x, \eta(x, t), t), \quad (3)$$

自由面的动力学边界条件和运动学边界条件可相应写成 (4a) (4b) 的形式

$$\Phi_t^s + g\eta + \frac{1}{2}(\nabla_x \Phi^s)^2 - \frac{1}{2}(1 + (\nabla_x \eta)^2)\Phi_z^2(x, \eta, t) = 0 \quad (4a)$$

$$\eta_t + \nabla_x \Phi^s \cdot \nabla_x \eta - (1 + (\nabla_x \eta)^2)\Phi_z(x, \eta, t) = 0 \quad (4b)$$

对速度势 Φ 作摄动展开, 即假定: Φ 和 η 是 $O(\varepsilon)$ 的量, ε 是度量波陡的小参数, 并把 Φ 展为 ε 的摄动级数,

$$\Phi(x, z, t) = \sum_{m=1}^M \Phi^{(m)}(x, z, t) \quad (5)$$

把 $\Phi^{(m)}$ 在 $z = 0$ 处泰勒展开, 可得到:

$$\Phi^s(x, t) = \Phi(x, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \Phi^{(m)}(x, 0, t) \quad (6)$$

在给定的瞬时时刻, 已知 Φ_s 和 η , 上式对未知的 Φ 是 Dirichlet 边界条件, 展开上式, 合并阶数相同的项, 我们可以得到在 $z = 0$ 处, 关于未知项 $\Phi^{(m)}$ 一系列边界条件:

$$\Phi^{(m)}(x, 0, t) = R^{(m)}, m = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

$$R^{(1)} = \Phi^s \quad (8)$$

$$R^{(m)} = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \Phi^{(m-k)}(x, 0, t), m = 2, 3, \dots, M, \quad (9)$$

这一系列 Dirichlet 边界条件, 以及 Laplace 方程和物体表面和底部的边界条件, 定义了全流场对 $\Phi^{(m)}, m = 1, 2, \dots, M$ 的一系列边值问题。对于给定的 Φ_s 和 η , 这些问题可以逐阶计算。我们将 $\Phi^{(m)}$ 展开:

$$\Phi^{(m)}(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(m)}(t) \Psi_n(x, z), z \leq 0, \quad (10)$$

$\Psi_n(x, z)$ 是满足 Laplace 方程, 物面条件、海底条件但是不满足 Dirichlet 自由面条件的本征函数。

然后我们可以得到问题的关键, 即自由面的垂向速度 $\Phi_z(x, \eta, t)$:

$$\Phi_z(x, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^{M-m} \frac{\eta^k}{k!} \sum_{n=1}^N \Phi_n^{(m)}(t) \frac{\partial^{k+1}}{\partial z^{k+1}} \Psi_n(x, 0), \quad (11)$$

在无限水深情况下, $\Phi^{(m)}(x, \eta, t)$ 可表示为:

$$\Phi^{(m)}(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(m)}(t) \exp[|k_n|z + ik_n \cdot x] \quad (12)$$

在有限水深 h 情况下, $\Phi^{(m)}(x, \eta, t)$ 可表示为:

$$\Phi^{(m)}(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(m)}(t) \frac{\cosh[|k_n|(z+h)]}{\cosh(|k_n|h)} \exp(ik_n \cdot x) \quad (13)$$

3 应用高阶谱方法进行聚焦波的数值模拟

在 HOS-ocean 中, 对速度势进行 M 阶摄动展开, 高阶谱阶数 M 的选取会对 HOS-ocean 的计算结果和计算时间有一定的影响。下面将在 $M=3$ 和 $M=5$ 两种情况下进行聚焦波的模拟, 探讨不同高阶谱阶数对聚焦位置和聚焦时刻以及计算时间的影响。

此外, 在 HOS-ocean 中输出频率 f (一个谱峰周期 T_p 内输出数据的个数) 的设置也会对计算时间有很大的影响, f 选取较小时, 不能输出足够的组数据, f 选取较大时, 计算时间又太长, 所以合理选取输出频率 f 也是高效计算的关键。由于本文选取的谱峰周期 $T_p = 1.2048s$, 所以这里探讨了 $f=1$, $f=8$, $f=15$ 及的情况, 其相对应输出的数据组数量如下表 1 所示。

表 1 输出频率 f 的含义

输入参数	实际含义
$f=1$	1s 输出约 0.83 组数据
$f=8$	1s 输出约 6.64 组数据
$f=15$	1s 输出约 12.25 组数据

由于 Song^[4]在 HOS-ocean 中引入 ITTC 双参数谱时, 对 ITTC 双参数谱的参数设定沿用了原有的 JONSWAP 谱参数设定, 选用谱峰周期 T_p 和有义波高 H_s 进行周期表达, 故其谱密度函数可表示为:

$$F_I(\omega) = \frac{173 \cdot H_s^2}{(0.78T_p)^4 \omega^5} \exp\left(-\frac{691}{(0.78T_p)^2 \omega^4}\right) \quad (14)$$

计算域设置：x 和 y 方向长度设置均为 30 个波长，约为 $67.987\text{m} \times 67.987\text{m}$ 。

聚焦波的参数设置：采用 ITTC 双参数谱，有义波高 $H_s = 0.06\text{m}$ ，谱峰周期 $T_p = 1.2048\text{s}$ ；聚焦时间选取为 50s ，聚焦位置选取在计算域中央，约为 $(33.99, 33.99)$ 。

图 1 展示了聚焦时刻 50s 附近的四个时间点的聚焦波形成图像，左图为全计算域图像，右图为全计算域图像在聚焦位置附近的局部放大图。

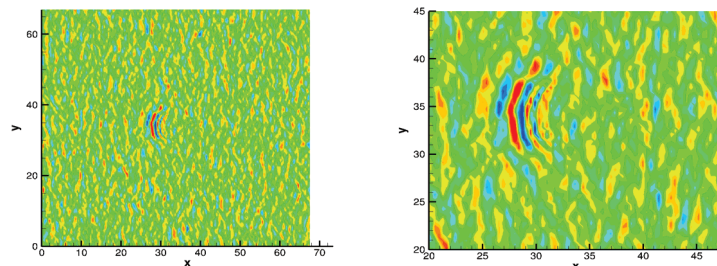


图 a 42.4692s

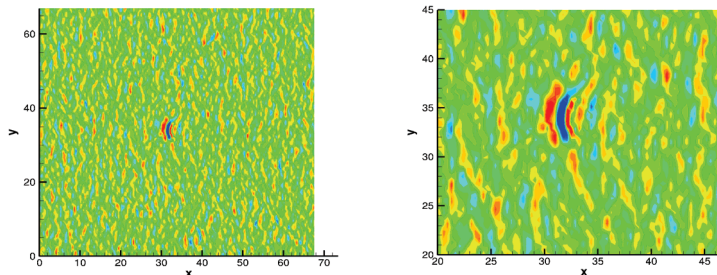


图 b 46.2342s

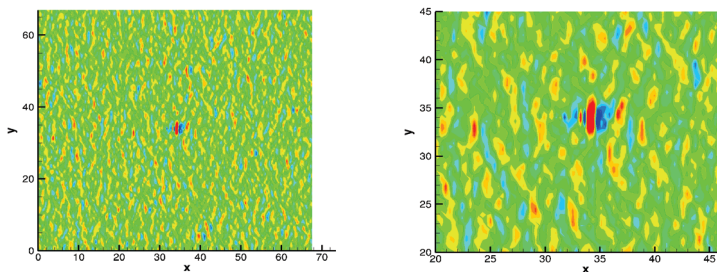


图 c 49.2462s

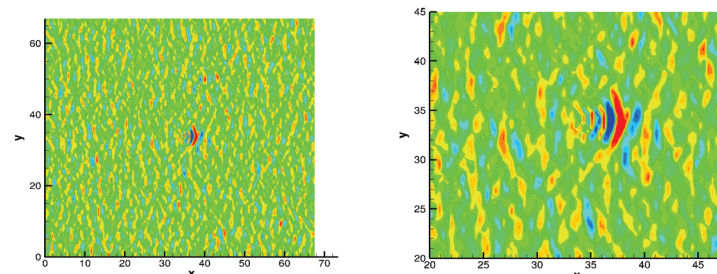


图 d 52.2582s

图 1 聚焦时间附近聚焦波的形成情况

在(33.99,33.99)处放置波高仪，监测聚焦位置的波高，聚焦位置处的波高时历曲线见图2。

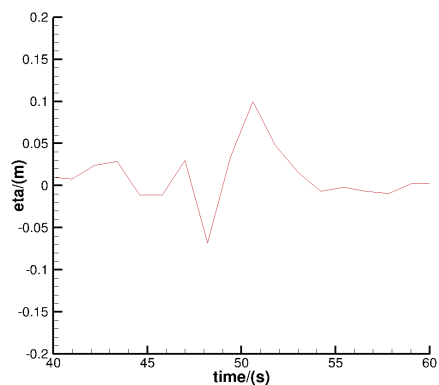


图 a $M=3, f=1$

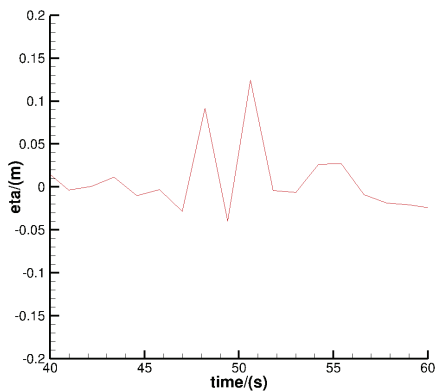


图 b $M=5, f=1$

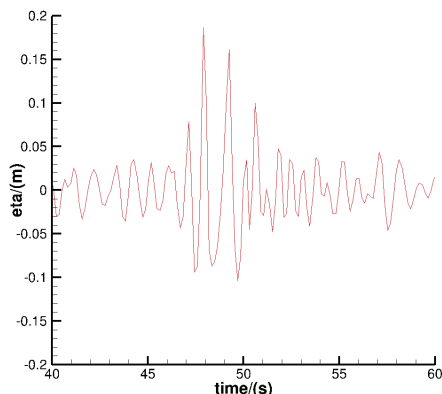


图 c $M=3, f=8$

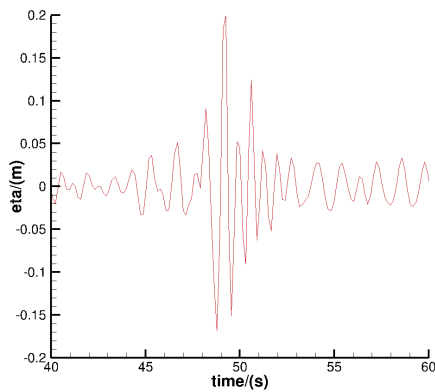


图 d $M=5, f=8$

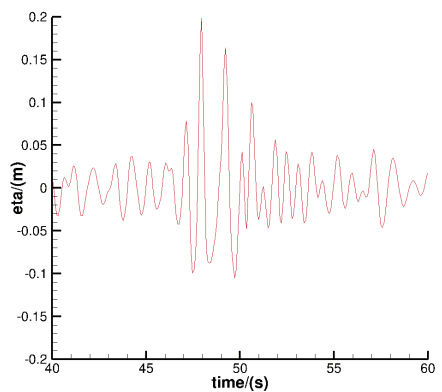


图 e $M=3, f=15$

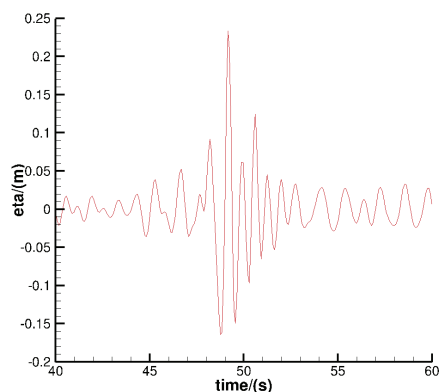


图 f $M=5, f=15$

图2 不同高阶谱阶数 M 和输出频率 f 下聚焦位置处的波高时历曲线

由 $H_{\max} / H_s > 2.2$ 定义畸形波, 统计了分别在高阶谱阶数 $M = 3$ 和 $M = 5$ 以及输出频率 $f = 1$, $f = 8$, $f = 15$ 六种不同情况下聚焦位置处畸形波开始、结束的时间和波高, 以及出现最大波高的时间及波高值, 统计结果如表 2 和表 3 所示, 相应计算时间如下表 4 所示:

表 2 M=3 情况下聚焦位置处聚焦情况统计表

M=3 时间(s)/波高(m)	f=1	f=8	f=15
畸形波开始	48.175/ -0.0668	47.137/ 0.0787	47.146/ 0.0777
畸形波结束	50.582/ 0.0986	50.601/ 0.0992	50.602/ 0.0995
最大波高出现	50.582/ 0.0986	47.891/ 0.1861	47.951/ 0.1987

表 3 M=5 情况下聚焦位置处聚焦情况统计表

M=5 时间(s)/波高(m)	f=1	f=8	f=15
畸形波开始	48.199/ 0.0908	48.190/ 0.0912	48.196/ 0.0909
畸形波结束	50.602/ 0.1243	50.602/ 0.1240	50.605/ 0.1231
最大波高出现	50.602/ 0.1243	49.229/ 0.1973	49.157/ 0.2330

表 4 不同 M、f 参数选择计算时间统计表

计算时间	M=3	M=5
f=1	58 min 40	2h 2min 34
f=8	4h 38min	11h 31min
f=15	7h 40min	20h 6min

由计算结果可以看出, $f=1$ 时, 数据缺失严重, 不能捕捉到聚焦波的峰值。相比 $f=8$ 和 $f=15$ 都可以较好地给出我们关于聚焦时刻附近聚焦波的情况, 但是 $f=8$ 相比 $f=15$ 时间节省近一半, 所以为节省计算成本, 输出频率 f 选取 8 即可, 不同数据需求情况下可对输出频率 f 酌情修改。

此外, 在输出频率 $f=8$ 和 $f=15$ 的情况下, 高阶谱参数 $M=5$ 时, 对小波的捕捉更好, 波形更完整, $M=3$ 时对水平面以下的波峰捕捉不好, 但都在聚焦位置和聚焦时间附近给出了较好的聚焦波情况, $M=3$ 的计算时间相比于 $M=5$ 时, 计算时间节省了一半以上, 可根据具体需求选取不同的高阶谱参数 M 。

4 结论

高阶谱方法可以高效快速地造波，并且可以和其他方法耦合使用，比如 Zhuang^[5]和宋家琦^[6]就将高阶谱方法和 CFD 方法耦合，并进行了 2D 和 3D 下的规则波和不规则波以及畸形波的耦合分析，为在这种耦合方法下进行结构物在波浪海况下的计算奠定了基础。本文则着重进行了聚焦波的数值模拟，并且探讨了如何设定高阶谱参数 M 和输出频率 f 使基于高阶谱方法的 HOS-ocean 进行高效造波，并给出所需数据，为后期耦合方法中结构物的引入奠定了基础。

致谢

本研究得到国家自然科学基金（51879159，51490675，11432009，51579145）、长江学者奖励计划(T2014099)、上海高校特聘教授(东方学者)岗位跟踪计划(2013022)、上海市优秀学术带头人计划(17XD1402300)、工信部数值水池创新专项课题(2016-23/09)资助项目。在此一并表示感谢。

参 考 文 献

- 1 West B J, Brueckner K A, Janda R S, et al. A new numerical method for surface hydrodynamics[J]. Journal of Geophysical Research: Oceans, 1987, 92.
- 2 Dommermuth D G, Yue D K P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1987, 184:267-288.
- 3 Ducroz G, Bonnefoy, Félicien, Le Touzé, David, et al. HOS-ocean: Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method[J]. Computer Physics Communications, 2016:S0010465516300327.
- 4 Jiaqi Song, Yuan Zhuang, Decheng Wan, New Wave Spectrums Models Developed Based on HOS Method, the Twenty-eighth (2018) International Ocean and Polar Engineering Conference Sapporo, Japan, June 10-15, 2018, pp.524-531.
- 5 Yuan Zhuang, Decheng Wan, Benjamin Bouscasse, Pierre Ferrant, Regular and Irregular Wave Generation in OpenFOAM using High Order Spectral Method, The 13th OpenFOAM Workshop (OFW13), Shanghai, China, 2018, 189-192.
- 6 宋家琦, 万德成. 基于高阶谱方法与 CFD 计算的耦合模型正在不规则波模拟中的应用[J]. 水动力学研究与进展, A 辑, 2019, 34(1): 1-12.

Numerical simulation of irregular waves based on High-Order Spectral method

YANG Xiao-tong, ZHUANG Yuan, WAN De-cheng

(Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-Sea Exploration, State Key Laboratory of Ocean Engineering, School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240. Email: dcwan@sjtu.edu.cn)

Abstract: The numerical wave tank based on the Higher Order Spectral method can generate and propagate waves rapidly. This paper studied the influence of higher-order spectral parameter M on the accuracy and time of calculation, and the influence of output frequency on the integrity of output datas and time of calculation in the applications of numerical simulation of irregular waves based on higher-order spectral method, which provides a reference for reasonable selection of corresponding parameters in the later study.

Key words: High-Order Spectral (HOS) method; focus wave; directional irregular waves; parameter research.