

粗糙元的宽高比对 Rayleigh-Bénard 对流系统传热的影响

董道良, 王伯福, 周全

(上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海, 200072, Email: qzhou@shu.edu.cn)

摘要: 本文主要研究粗糙元宽高比对系统传热的影响。我们选取了 5 个高度相同宽高比不同的粗糙元模型, 参数范围为 $10^6 < Ra < 10^9$ 、 $Pr=0.7$ 。根据模型中粗糙元分布的特点, 我们大致将模型分成两类, 一类是大宽高比粗糙元稀疏分布的模型; 另一类是小宽高比粗糙元密集分布的模型。结果发现大宽高比的稀疏模型对 Rayleigh-Bénard (RB) 系统传热的增强效果比小宽高比的密集模型要好很多。其促进传热的机理不是更多羽流的激发与释放, 而是特殊几何形状对流体的约束不同, 导致大尺度环流更加靠近上下边壁, 使热边界层变薄, 进而促进了热输运

关键词: 湍流热对流; 传热; 粗糙元;

1 引言

在传统的 Rayleigh-Bénard (RB) 系统中, 假设上下导板是光滑的。然而, 在大多数应用和自然现象中, 更多的是粗糙的壁面, 壁面粗糙元可以在传热等方面发挥重要作用。例如, 大气和海洋中的对流受地球表面粗糙地形的影响; 表面粗糙元通常用于增强加热/冷却装置中的热传输。近几年来, 有关湍流 RB 对流粗糙元对传热的研究发展迅速。实验研究方面, 对于 $Nu=A(Pr,\Gamma)Ra^\beta$ 的标度律关系有不同的结果。许多公布的实验数据与 Malkus 预测的标度律^[1]一致, 同时一些人观察到标度律指数 β 的增加。在由 Shen 等的实验研究中^[2], 当粗糙元的高度大于热边界层的平均厚度时, 前因子 $A(Pr,\Gamma)$ 增加了大约 20%。后来发现热输运增强是由于粗糙元尖端释放出更多的热羽流^[3]。Du & Tong^[4]通过增加粗糙度元素的高度, 发现前因子 $A(Pr,\Gamma)$ 的快速增加。Roche^[5], Qiu^[6], Tisserand^[7], Salort^[8] 和 Wei^[9] 等也发现了标度律的变化, 从 $\beta=1/3$ 到 $\beta=1/2$ 。此外, Xie & Xia^[10] 和 Rusaouën 等^[11] 的最近两项实验研究发现标度律的二次转变, 其标度指数下降到 $1/2$ 以下, 而传热量仍然大于光滑的情况。总的来说, 标度律取决于具体的粗糙元性质和所研究的 Ra 数和 Pr 数范围。

Jiang 做了一个很有趣的研究^[12]，他在对流槽的上下板做了方向相反的棘齿粗糙元结构，发现在非对称粗糙元结构中，传热对大尺度环流的方向很敏感。

由于计算机计算能力的提高，粗糙导板 RB 对流的三维直接数值模拟越来越流行。Stringano 等^[13]研究了底部带有 V 形粗糙单元的圆柱对流槽内的传热，并与相关实验结果^[2]进行了印证性比较。Wagner 和 Shishkina^[14]研究了具有扁平小长方体粗糙元的三维矩形平行六面体对流槽，并观察到了两种标度律区域。Srikanth 等^[15]对上平板带有正弦粗糙元的二维对流槽进行了直接数值模拟，研究了大尺度环流与边界层的相互作用。正如参考文献[13,16]所观察到的，表面粗糙元并不总是能增强热传递，当粗糙度高度很小时，它也会降低整体热传递。Zhang 等^[17]解释了这种传热减少的机理，主要是因为粗糙元高度较小时，流体黏性起主导作用，致使温度边界层变厚，热量被限制在粗糙元之间的腔体内，因此传热降低。在使用正弦粗糙元的二维数值研究中^[18-19]，也发现标度律 β 取决于粗糙元的波长。Zhu 等^[20]揭示了标度律的转变在于主流区热耗散和边界层热耗散之间的比率的变化。 Ra 数的进一步增加导致粗糙元表面均匀覆盖较薄的热边界层，并恢复了经典的边界层控制状态，从而使标度指数减小到接近光滑情况的值。

RB 湍流热对流系统的核心关键问题之一是热量如何被输运的。目前的相关研究大多数是研究上下板光滑的模型及粗糙元规则排列的模型，但实际的自然界中的粗糙壁面的粗糙元排列不是规则的，并且粗糙元的不同排列方式对系统传热和流动结构的研究较少，因此研究粗糙元不同排列的 RB 对流系统，对我们认识和理解自然界中对流问题和湍流传热的机理有重要意义。

2 物理模型及数值方法

在 Oberbeck–Boussinesq 近似下，选取的特征长度为 H ，特征速度为 κ/H ，特征温度为 Δ ，特征时间为 H^2/κ ，无量纲化后 RB 对流系统的控制方程组为：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Ra Pr T \hat{e}_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (3)$$

以上的方程组分别描述了系统的质量，动量，和能量的守恒。方程组中的 $\mathbf{u}$ 是速度矢量， T 是温度， p 是压力， $\mathbf{g}$ 是重力加速度， $\hat{e}_y$ 为竖直方向的单位矢量。

本章中研究的几何构形如图 1 所示。从模型 1-1 到模型 1-5，各个模型中粗糙元的高度不变， $h=1/24$ ，不同模型中粗糙元的宽高比不同，宽高比较小时，粗糙元的数目增加，粗糙元间的腔体数量也增加，但是不同模型中粗糙元的总面积是相同的。如图 1 所示，模型 1-1 到模型 1-5 粗糙元的数量逐渐增加，模型 1-1 只有一个粗糙元，最为接近光滑模型。所

有模型中的粗糙元都是等腰三角形。我们通过这 5 个模型研究上下导板粗糙元的宽高比对 RB 对流系统传热的影响。

在我们的数值模拟计算中, Pr 数固定在 $Pr=0.7$, Ra 数的变化范围为 $10^6 < Ra < 10^9$, 数据收集的时间超过 $500\tau_f$, 这里 $\tau_f = \sqrt{RaPr}$ 是自由落体时间。为了捕捉边界层里面的流动, 对边界层处的谱元进行了加密。在每个谱元中根据谱元法采用了 P 级高斯求积节点, 进一步在每个计算单元里面划分成 $P \times P$ 网格, 在本文中, $P=11$ 。

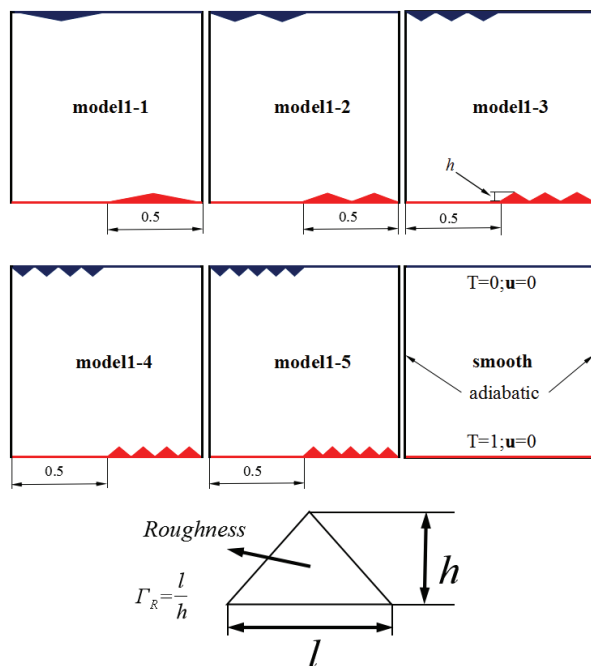


图1 五种宽高比 Γ_R 不同的粗糙模型和光滑模型的简图, 粗糙元的宽高比 Γ_R 定义为底边长 l 与高 h 之比。上下粗糙元高度固定为 $h=1/24$, 粗糙元的宽高比 Γ_R 从模型 1-1 到模型 1-5 依次为 $\Gamma_R=12$, $\Gamma_R=6$, $\Gamma_R=4$, $\Gamma_R=3$, $\Gamma_R=2.4$ 。

本文中, 为了验证数值结果的正确性, 设置了验证算例, 并将其结果跟已发表论文中的结果进行了比较 (表 1)。计算结果与文献[21]中有限差分的结果相比误差小于 1%。从表 1 中可以看出, 本文结果与文献结果符合地非常好, 两种数值方法的数值解误差很小, 从而验证了本文结果的可靠性。

表1 不同 Ra 数下计算结果与 Zhang 等^[21] 的比较

Ra	10^6	10^7	10^8	10^9
Nu	6.29	11.35	25.02	53.12
Ref. ^[21]	6.30	11.37	25.25	53.51

3 粗糙元宽高比对系统传热的影响

我们首先比较了在不同 Ra 数下, 5 种粗糙模型对系统传热的影响。具体的结果见图 2, 为了清晰的观察不同模型对传热的影响, 我们用相同 Ra 数情况下光滑模型的 Nu 数对所有的传热 Nu 数进行归一化。从 Nu 数的比值的变化曲线可以清楚地看到不同模型对 RB 系统传热的影响。从图中我们可以观察到在低 $10^6 \leq Ra \leq 10^8$ 范围内, 模型 1-3、模型 1-4 和模型 1-5 的热传递都受到抑制, 这与文献中的结果^[13,16,17]是一致的。传热受抑制最多的点是宽高比最小的模型 1-5, 对应的 $Ra = 2 \times 10^7$ 。而粗糙元宽高比较大的粗糙模型则展现出了完全不同的现象, 模型 1-1 的传热效率大于光滑模型 5%~7%左右, 模型 1-2 的传热效率则与光滑模型差别不大。当 $10^8 \leq Ra \leq 10^9$ 时, 归一化后的 Nu 数一般随 Ra 数的增大而增大。

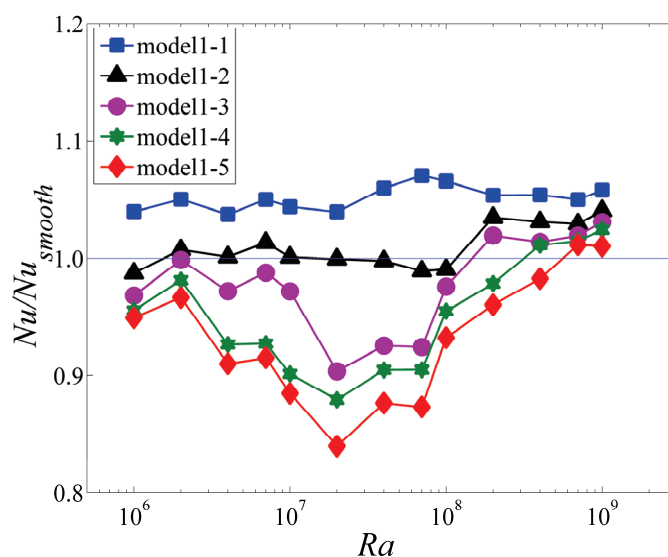


图2 五个粗糙模型对系统传热影响随 Ra 数的变化情况。图中的纵坐标表示对传热影响的相对比率大小, 该比率是用光滑情况下的模型的传热 Nu_{smooth} 进行归一化

整体来看 Γ_R 较大的稀疏模型(模型 1-1, 模型 1-2)其 Nu 数的变化要比 Γ_R 密集模型(模型 1-3, 模型 1-4, 模型 1-5)稳定。因此对于模型 1-3, 模型 1-4, 模型 1-5 来说传热在

低 Ra 数区间传热降低, 在高 Ra 数区间传热增加; 而模型 1-1 和 1-2 对 RB 系统的传热的影响与 Ra 数的关系不大, 尤其是模型 1-1, 其影响传热的机制与其它模型影响系统传热的机理是不同的。

图 3 是 $Ra=1\times 10^8$ 时光滑模型和 5 个粗糙模型的平均温度场和速度场。从图中可以看到, 5 个粗糙模型都会把上下导板的冷热流体限制在粗糙元之间的腔体内。但由于粗糙元的几何尺寸的不同, 粗糙元的 Γ_R 较大时(模型 1-1 和模型 1-2 中)粗糙元间的腔体对腔体中携带热量的流体的限制作用远远小于其他 3 个模型。当携带热量的流体不能被充分地的主流区中的流体混合时, RB 对流系统的热输运受到抑制。在这里不同 Γ_R 的粗糙元(模型 1-3、模型 1-4、模型 1-5)降低传热的机理可以用 Zhang 等^[17]的工作解释。从平均流场的图中可以看到, 在模型 1-3、模型 1-4、模型 1-5 中, 流体的粘性在相邻粗糙元之间的腔体中起主导作用, 而大尺度环流很难影响到粗糙元之间腔体内流体的流动。因此, 在这种情况下, 热输运效率更低。

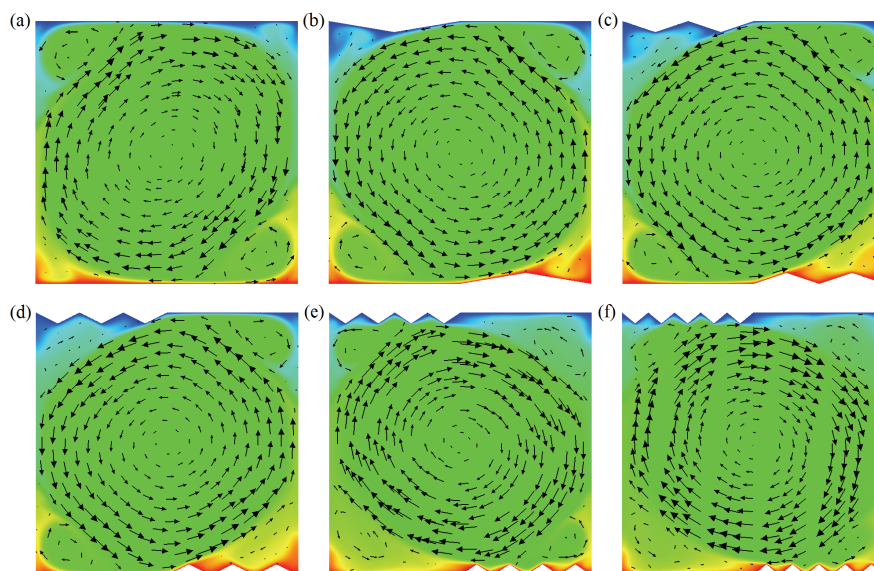


图 3 五个粗糙模型 $Ra=10^8$ 时各个模型的平均场。

(a) 光滑模型, (b) 模型 1-1, (c) 模型 1-2, (d) 模型 1-3, (e) 模型 1-4, (f) 模型 1-5

在模型 1-1 和模型 1-2 中, 我们看到对应的流场与模型 1-3, 1-4, 1-5 中的流场相似, 但是对应的 Nu 数差别很大。在模型 1-1 和模型 1-2 中由于相邻粗糙元之间的距离较大, 大尺度环流更容易影响粗糙元间腔体内流体的运动。虽然粗糙元尖端处会释放更多的羽流^[3,19]。但这两个模型中粗糙元数量较少, 粗糙元尖端释放的羽流数量也相对较少。因此这两个模型的传热效率高于其他三个模型的原因不是释放羽流的数量增加。通过分析流场很难说明这两个模型传热效率高于其他模型的原因。接下来我们将通过其他手段揭示这两个模型传热更高的机理。

通过以上分析我们可以得知，模型 1-1 和模型 1-2 传热与其他模型传热机理不同的原因，不是粗糙元促进了羽流的释放。我们考虑流体平均动能的空间分布是不是影响其传热的机理的原因。带着这个推测，我们计算了不同模型的平均动能场，动能定义为：

$$K = (v_x^2 + v_y^2) / 2 \quad (4)$$

计算结果如图 4 所示，通过图中不同模型的平均动能分布我们发现了模型 1-1 和模型 1-2 传热异于其他模型的原因。从图中可以明显地看到，所有模型的高动能区域都在对流槽的边壁附近。光滑模型、模型 1-1 和模型 1-2 的高动能带比其他模型更加靠近边壁，更加靠近上下边壁的高动能流体带走了更多的热量，这种情况下热量运输的机制不再是以羽流的释放为主，而是上下板附近局部对流强度的增加进而导致热量更容易被大尺度流动结构带走。

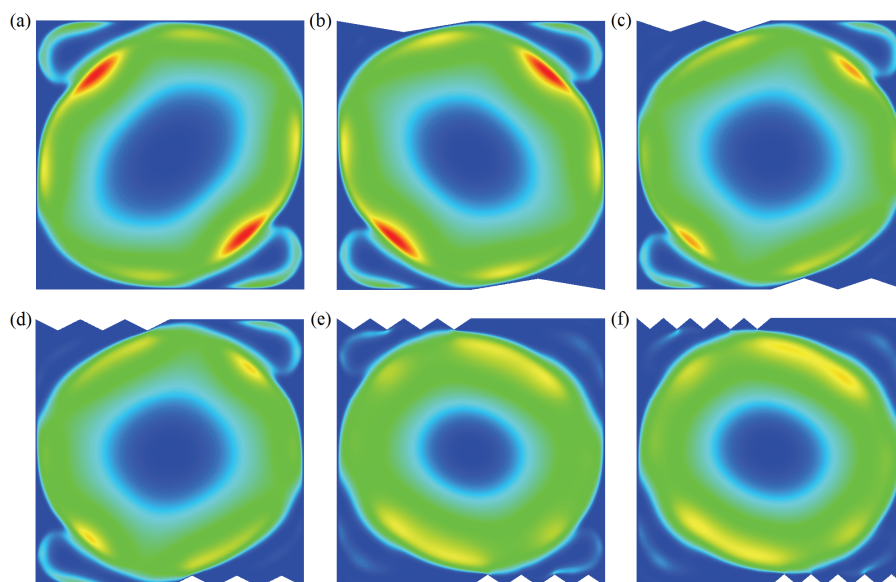


图 4 五个粗糙模型 $Ra=10^8$ 时各个模型的平均动能场。

(a) 光滑模型, (b) 模型 1-1, (c) 模型 1-2, (d) 模型 1-3, (e) 模型 1-4, (f) 模型 1-5

因此模型 1-1 和模型 1-2 的传热机制主要是几何形状对流体的约束。特殊的几何形状使得对流系统的高速流动区域趋近于边壁，导致系统热运输由羽流释放输运变为大尺度流动结构输运，因此这两个模型的传热情况与其它模型不同。从图中我们给出定性的分析解释，模型 1-2 中上下板高动能区域的分布情况与光滑模型相近，所以在 $Ra \leq 10^8$ 时，模型 1-2 中的传热与光滑模型近似相等，在 $Ra \geq 10^8$ 时，由于温度边界层变薄粗糙元尖端释放更多的羽流，因此传热相对增加。而模型 1-1 中的高动能区域更加靠近上下边壁，因此大尺度流动结构可以带走更多的热量，因此模型 1-1 的传热在计算的 Ra 数范围内比光滑模

型要高。

参 考 文 献

- 1 Malkus, W V R. The Heat Transport and Spectrum of Thermal Turbulence. Proceedings of the Royal Society of London, 1954, 225(1161): 196-212
- 2 Shen Y, Tong P, Xia K Q. Turbulent convection over rough surfaces. Physical Review Letters, 1996, 76(6): 908-911
- 3 Du Y B, Tong P. Enhanced Heat Transport in Turbulent Convection over a Rough Surface. Physical Review Letters, 1998, 81(5): 987-990
- 4 Du Y B, Tong P. Turbulent thermal convection in a cell with ordered rough boundaries. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 407: 57-84
- 5 Roche P E, Castaing B, Chabaud B, Hebral B. Observation of the $1/2$ power law in Rayleigh-Bénard convection. Physical Review E, 2001, 63(4): 045303
- 6 Qiu X L, Xia K Q, Tong P. Experimental study of velocity boundary layer near a rough conducting surface in turbulent natural convection. Journal of Turbulence, 2005, 6(30): 1-13
- 7 Tisserand J C, Creysse M, Gasteuil Y, Pabiau H, Gibert M, Castaing B, Chillà F. Comparison between rough and smooth plates within the same Rayleigh-Bénard cell. Physics of Fluids, 2011, 23(1): 6421
- 8 Salort J, Liot O, Rusaouen E, Seychelles F, Tisserand J C, Creysse M, Castaing B, Chilla F. Thermal boundary layer near roughnesses in turbulent Rayleigh-Bénard convection: Flow structure and multistability. Physics of Fluids, 2014, 26(1): 529-546
- 9 Wei P, Chan T S, Ni R, Zhao X Z, Xia K Q. Heat transport properties of plates with smooth and rough surfaces in turbulent thermal convection. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 740: 28-46
- 10 Xie Y C, Xia K Q. Turbulent thermal convection over rough plates with varying roughness geometries. Journal of Fluid Mechanics, 2017, 825: 573-599
- 11 Rusaouën E, Liot O, Castaing B, Salort J, Chillà F. Thermal transfer in Rayleigh-Bénard cell with smooth or rough boundaries. Journal of Fluid Mechanics, 2018, 837: 443-460
- 12 Jiang H C, Zhu X J, Mathai V, Verzicco R, Lohse D, Sun C. Controlling Heat Transport and Flow Structures in Thermal Turbulence Using Ratchet Surfaces. Physical Review Letters, 2018, 120(4): 044501
- 13 Stringano G, Pascazio G, Verzicco R. Turbulent thermal convection over grooved plates. Journal of Fluid Mechanics, 2006, 557: 307-336
- 14 Wagner S, Shishkina O. Heat flux enhancement by regular surface roughness in turbulent thermal convection. Journal of Fluid Mechanics, 2015, 763: 109-135
- 15 Toppaladoddi S, Succi S, Wettlaufer J S. Breaking the boundary layer symmetry in turbulent convection

- using wall geometry. Eprint Arxiv, 2014, 2-7
- 16 Shishkina O, Wagner C. Modelling the influence of wall roughness on heat transfer in thermal convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, 686:568-582
- 17 Zhang Y Z, Sun C, Bao Y, Zhou Q. How surface roughness reduces heat transport for small roughness heights in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, 836:R2
- 18 Toppaladoddi S, Succi S, Wettlaufer J S. Tailoring boundary geometry to optimize heat transport in turbulent convection. *Europhysics Letters*, 2015, 111(4):1-6
- 19 Toppaladoddi S, Succi S, Wettlaufer J S. Roughness as a Route to the Ultimate Regime of Thermal Convection. *Physical Review Letters*, 2017, 118(7):074503
- 20 Zhu X J, Stevens R J A M, Verzicco R, Lohse D. Roughness-Facilitated Local $1/2$ Scaling Does Not Imply the Onset of the Ultimate Regime of Thermal Convection. *Physical Review Letters*, 2017, 119(15):154501
- 21 Zhang Y, Zhou Q, Sun C. Statistics of kinetic and thermal energy dissipation rates in two-dimensional turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 814:165-184

The effect of rough element on heat transfer in Rayleigh-Bénard convection

DONG Dao-liang, WANG Bo-fu, ZHOU Quan

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai, 200072, Email: qzhou@shu.edu.cn)

Abstract: In this paper, the effect of aspect ratio of rough elements on heat transfer of the system is studied. Five rough models with the same height and different aspect ratio were selected. The parameters ranged from $10^6 < Ra < 10^9$ and $Pr = 0.7$. According to the characteristics of rough element distribution in the model, we roughly divide the model into two categories, one is the sparse distribution model of rough element with large aspect ratio, the other is the dense distribution model of rough element with small aspect ratio. The results show that the heat transfer enhancement effect of the sparse model with large aspect ratio is much better than that of the dense model with small aspect ratio. Its mechanism of promoting heat transfer is not more plume excitation and release, but different restrictions on fluid due to special geometry, which results in large-scale circulation closer to the upper and lower walls, thinning the thermal boundary layer and further promoting heat transport.

Key words: Turbulent heat convection; Heat transfer; Roughness;