

绕辐射水波格林函数的机器学习与预报

朱鹏远¹, 朱仁传², 黄山²

(1. 清华大学电子工程系, 北京, 100084; 2 上海交通大学船舶与海洋工程系, 上海, 200240)

摘要: 针对深水绕射辐射问题的脉动点源格林函数, 提出机器学习建模与预报方法。论文推导并给出无因次化的脉动点源格林函数表达, 采用自适应积分计算获得格林函数库, 通过机器学习训练形成了多层感知网络模型, 研究表明网络模型预报的格林函数数值准确、计算效率高, 是提高水动力问题求解效率的新手段, 为解决传统计算难题带来了新思路。

关键词: 格林函数; 自由面; 辐射绕射; 机器学习

1 引言

在经典的线性势流理论范畴内, 处理船舶与海洋工程结构物频域绕射辐射问题时, 常用格林函数法计算附加质量和阻尼系数、运动和波浪载荷^[1]。格林函数通常包括简单格林函数和复杂格林函数, 简单格林函数亦被叫做 Rankine 源格林函数, 由基本空间奇点构成; 复杂格林函数一般指自由面格林函数, 特指无限流域中满足线性自由面条件的波动格林函数, 众所周知, 它代表的是自由面下一个奇点处的点源运动所产生的速度势, 是波浪绕射理论的基础^[2]。格林函数法亦称边界元法、奇点分布法或源汇分布法。由于这种方法在应用上相当灵活, 对边界的适应性很强, 从 1964 年 Hess 和 Smith 引入源汇分布法以来^[3], 被广泛地应用于求解波浪问题, 是解决船舶阻力、运动与载荷等工程问题的重要方法。

三维自由面格林函数是个无穷积分, 被积函数具有高频振荡和增幅的特性, 对于该函数的计算非常困难^[2]。精度和效率是格林函数法实施的基本要求, 很多学者开展了频域自由面格林函数准确快速计算的研究, 目前自由面格林函数主要有如下三类计算方法: 直接数值积分方法、级数/渐近展开方法和子域划分加多重切比雪夫多项式逼近方法。直接数值积分方法易于数值编程实现, 计算耗时, 但可以得到指定精度的格林函数及其导数值。级数/渐近展开方法即通过将自由面格林函数积分形式表达为级数和形式来改善数值计算效率。多项式逼近方法的计算效率最高, 有全域逼近的, 也有基于子域划分结合多重切比雪夫逼近的, 此方法的研究者有 Newman^[4-5]、Chen 等^[6], Francis 和 Wu 等^[7-8], Shan 等^[9], 他们的算法有的已经成为商用程序的基础。解析逼近计算高效但有时也难以控制精度, 为避免精度损失需要对区域进行有效划分。

机器学习属于人工智能科学的分支，是一种通用性的数据处理技术，包含了大量的学习算法，已成功地应用于无人驾驶、图像处理、医学诊断等多个领域。由于机器学习可以充分利用数据或经验自动改进优化计算程序^[10]，本文结合格林函数计算并引入机器学习方法，以解决水动力问题求解中对格林函数高精度快速计算或预报的实践需求。机器学习算法主要分为监督算法、无/非监督算法和强化学习等多类算法，众所周知的神经网络算法就是监督学习中的典型算法之一。正如 Bishop 指出，带有非线性激活函数的感知器网络在非线性的拟合方面具有出色的性能，速度和精度都高于传统的迭代方法^[11]。

近年来，尽管计算机技术发展飞速，三维自由面格林函数的快速计算仍然是个难题，是制约快速求解船海工程水动力问题和工程实现的“瓶颈”。本文以深水绕射辐射问题为例，推导了脉动点源格林函数及其导数的 θ 型积分表达，采用自适应积分计算获得高精度的格林函数，使用 MLP 方法进行训练学习，构建高精度快速获得格林函数的网络预报模型，并进行预报验证。研究表明机器学习预报模型具有高精度高效率的特性，能有效提高船海工程水动力问题的求解和工程实现，本文研究方法为传统力学计算的实现带来了新思路。

2 绕辐射水波格林函数及其无因次表达

2.1 绕辐射格林函数及其偏导数

为探索机器学习在绕辐射水波格林函数预报上的应用，本文以格林函数法求解浮体绕射辐射问题中的脉动点源为例，先给出满足自由面条件的格林函数及其偏导数的表达。若场点坐标为 (x, y, z) ，源点坐标为 (ξ, η, ζ) ，时间因子为 $-i\omega t$ ，深水脉动源格林函数波动部分（简便起见，下称格林函数）可描述为：

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{k_0}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{m - k_0} e^{m(z+\zeta) + im[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]} d\theta dm \quad (1)$$

式中 k_0 为波数。该式为关于广义波数和广义浪向角的双重积分，沿实轴 $(0, \infty)$ 积分时，在 $m=k_0$ 上有奇点，根据无穷远处满足外传播波辐射条件，积分路径需从下面绕过奇点^[1]。令 $Z=z+\zeta$ ， $R=\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ ，应用贝塞尔(Bessel)函数可得到 G 的 k 型单重积分，

$$G = 2k_0 \int_0^\infty \frac{1}{m - k_0} e^{mZ} J_0(mR) dm = 2k_0 P.V. \int_0^\infty \frac{1}{m - k_0} e^{mZ} J_0(mR) dm + 2k_0 \pi i e^{k_0 Z} J_0(k_0 R) \quad (2)$$

第二个等式来源于绕奇点 $m=k_0$ 的半个留数， $P.V.$ 是积分取柯西主值的意思。

分别求公式(2)对垂向 z 和水平方向 R 的偏导，整理可得：

$$\begin{cases} G_z = \frac{k_0}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{m}{m - k_0} e^{mZ + imR \cos\theta} d\theta dm = k_0 \left(\frac{2}{r_1} + G \right) \\ G_R = \frac{k_0}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{im \cos\theta}{m - k_0} e^{mZ + imR \cos\theta} d\theta dm \end{cases} \quad (3)$$

2.2 格林函数 θ 型单重积分及无因次化

将积分中的广义波数 m 对 k_0 进行无因次化处理, 得到的积分与原形式一致,

$$G = \frac{k_0}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{\frac{m}{k_0} - 1} e^{\frac{m}{k_0}(k_0 Z + i k_0 R \cos \theta)} d\theta d\frac{m}{k_0} = \frac{k_0}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{m - 1} e^{m(k_0 Z + i k_0 R \cos \theta)} d\theta dm$$

记 $X = k_0 R$, $Y = k_0 Z$, $M = Y + iX \cos \theta$, 交换积分次序, 可得到 G 的 θ 型单重积分:

$$\frac{\pi G}{k_0} = \int_{-\pi}^\pi d\theta \int_0^\infty \frac{1}{m - 1} e^{m(Y + iX \cos \theta)} dm = \int_{-\pi}^\pi e^M [E_1(M) + i2\pi H(\cos \theta)] d\theta$$

进一步可记,

$$F(X, Y) = \int_{-\pi}^\pi e^M [E_1(M) + i2\pi H(\cos \theta)] d\theta \quad (4)$$

式(4)是 θ 的单重积分, 函数 $F(X, Y)$ 中的只有自变量 X 、 Y , 可理解为是相对辐射波长的水平和垂向位置, 是无因次化的距离。H 为阶跃函数, 表达如下: $\cos \theta < 0$ 时 $H=0$; $\cos \theta = 0$ 时 $H=0.5$; $\cos \theta > 0$ 时 $H=1$ 。E₁ 可以写成: $E_1(M) = -\gamma - \ln M - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n M^n / nn!$ ($|\arg M| < \pi$)。

同理可得格林函数的水平方向偏导数

$$F_1(X, Y) = \frac{\lambda^2 G_R^*}{4\pi} = \int_{-\pi}^\pi i \cos \theta \left\{ -\frac{1}{\alpha} + e^M [E_1(M) + i2\pi H(\cos \theta)] \right\} d\theta \quad (5)$$

3 格林函数的机器学习与预报验证

3.1 格林函数计算与数据库

式(4)和式(5)中的复指数积分, 通常可以用多项式、制表插值或者级数展开的方法计算, 制表插值法的适用范围有限, 文献[12]采用 Hess 等给出的分式多项式来计算时, 效率高精度约 10^{-5} 量级, 级数展开的方法效率较低但可以得到更高的精度。形式上 F 和 F_1 的积分核没有奇异点, 比较有利于数值计算处理。但积分核函数高频振荡, 目前较好的办法是采用自适应的求积计算, 可以参看笔者对于有航速格林函数的处理^[11]。

由上可知格林函数对任何频率通用, 实际应用时只需做 F 和 F_1 关于 X 、 Y 的统一的数据库就可以了。将船长、船宽和吃水因素考虑到 X 和 Y 里去, 并结合性能评估的无因次频率范围, X 不小于 20, Y 的绝对值不小于 8 基本满足浮体的性能评估。图 2 为 X 、 Y 方向上的间隔分别取 0.05 和 0.01, 矩形 $[0, 20] \times [0, -8]$ 范围内的格林函数库。

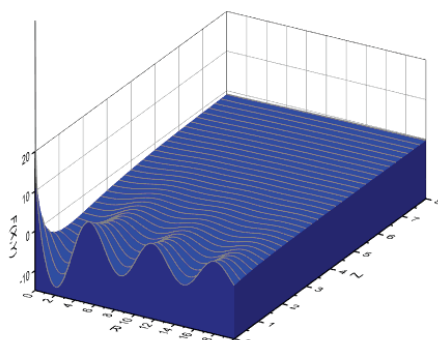


图 2 无因次化的格林函数库

3.2 机器学习监督算法 MLP 与建模

机器学习是一种通用性的数据处理技术, 人工神经网络中的多层感知器 (MLP), 带有非线性激活函数的感知器网络, 在非线性函数的拟合方面性能突出, 能保持水波格林函数的高精度要求。多层感知器除了输入输出层, 它中间可以有多个隐层, 最简单的 MLP 只含一个隐层, 即三层的结构 (图 3)。从图 3 可以看到多层感知器层与层之间是全连接的。输入层可以是一个 n 维向量 (即有 n 个神经元)。隐藏层的神经元由输入层神经元得到, 假设输入层用向量 $\mathbf{x}$ 表示, 则隐藏层即为 $f(W_1\mathbf{x}+b_1)$, W_1 是权重, b_1 是偏置; 最后的输出层由隐藏层表达, 预报模型函数可写为: $f(\mathbf{x}) = G\{b_2+W_2[s(b_1+W_1\mathbf{x})]\}$, s 为 sigmoid 函数。MLP 所有的参数就是各个层之间的连接权重及偏置。具体确定这些参数是一个最优化问题。

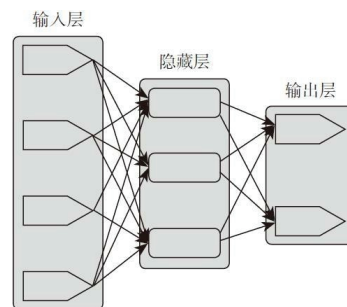


图3 监督算法 MLP 的结构示意图

此次格林函数的机器学习选用了三层的感知器网络, 输入为位置 (X,Y) 和函数 F , 矩形区域内横向纵向等距离散形成训练样本, 隐藏层共设置 100 个节点, 使用 sigmoid 激活函数, 输出层使用线性激活函数。选用均方误差的损失函数, 使用 Levenberg-Marquardt 算法进行迭代, 该方法兼具快速收敛与最终收敛精度要求, 有远超前于基于梯度下降的常规优化器的性能。作为探索, 本文对格林函数库中矩形 $[0,40] \times [0,-0.8]$ 平面离散的 800×80 个数据样本进行训练, 实际上这是函数值波动最为剧烈的区域, 较能反映神经网络方法的整体性能。由于网络不需要泛化能力, 没有设置测试集与验证集, 这使得网络能达到的最大精度大幅提升。经过 20 万次迭代之后得到最终的 MLP 网络模型。

3.3 格林函数 MLP 模型的预报精度与效率

图 4 为格林函数库数据和机器学习训练出来 MLP 网络模型预报出来的结果, 可以观察到神经网络预报的数据与原始数据基本一致。在接近原点处函数值较大, 其他区域函数为逐渐衰减的波动。图 5 为 MLP 网络预报数据的误差分布图, 可以看出大部分区域误差都到 10^{-5} 量级。较大的误差主要集中在 $X=0$ 附近, 实际代表脉动源附近位置, 或非常贴近水面, 实际计算中这一部分的数据精度也需要特殊处理。

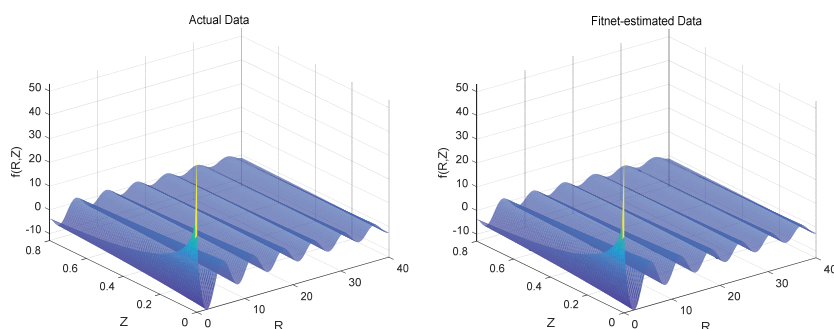


图4 实际数据与神经网络预报数据

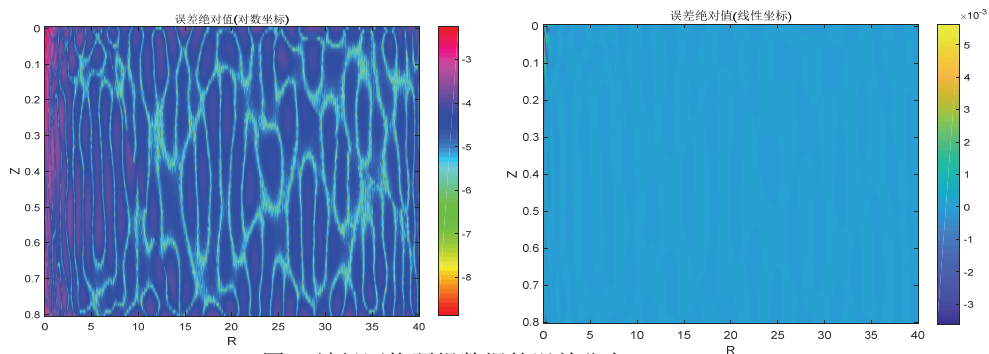


图5 神经网络预报数据的误差分布

从图 6 可以进一步看出，数值上误差呈正态分布在 0 附近，99%的误差均在 $(-3\sim3)\times 10^{-4}$ 之间，误差绝对值的均值为 4.24×10^{-5} ，非常接近数值积分计算的精度，已经达到了实际工程应用的精度要求。

采用四核 2.4GHz 的 CPU 对数值算法与神经网络预报算法进行测试，得到结果如表 1。神经网络预报速度约为数值方法的百倍。注意到数据规模更大时，神经网络表现出了更好的性能，这是由于神经网络进行计算时，可以将全部输入看做一个大规模的输入矩阵同时进行运算，提高了运算的速度。

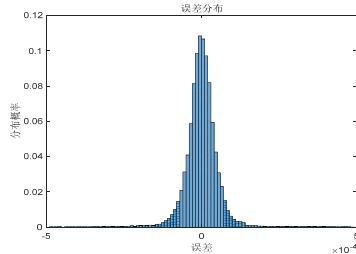


图6 神经网络预报数据的误差分布概率

表 1 不同数据规模下单次计算的平均用时

方法\输入数据规模	65000	1050000
数值方法	392.6μs	387.2μs
神经网络方法	3.013μs	1.321μs

4 结语

近年来，尽管计算机技术有了飞速的发展，三维自由面格林函数的计算仍然是个难题，是制约高精度快速求解船海工程水动力问题和工程实现的“瓶颈”。本文以深水绕射辐射问题，推导了脉动点源格林函数及其导数的 θ 型积分表达，采用自适应积分计算获得高精度的格林函数，设计并计算形成了覆盖全频率的格林函数库，引入了机器学习方法，构建了格林函数的多层感知网络模型，并进行了预报验证分析。研究表明本文机器学习构建的格林函数预报模型具有较高的计算效率，计算精度依赖于训练数据，对于能够提供充分格林函数样本，本文 MLP 预报模型具有高精度高效率的特性，本文方法为提高水动力问题求解效率提供了新手段，为传统力学难题的解决带来了新思路。

参 考 文 献

- 1 朱仁传, 缪国平. 船舶在波浪上运动理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2019.
- 2 朱仁传, 缪国平, 洪亮, 等. 自由面格林函数分类计算及船海水动力学中的应用[J], 水动力学研究与进展, A 辑, 2014, 29(4):469-478.
- 3 Hess J L, Smith A M O. Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies [J]. Journal of Ship Research, 1964, 8(2):22-44.
- 4 NEWMAN J N. An expansion of the oscillatory source potential [J]. Applied Ocean Research, 1984, 6(2):116-117.
- 5 NEWMAN J N. Algorithms for the free-surface Green function [J]. Journal of Engineering Mathematics, 1985, 19: 57-67.
- 6 Chen, X.B. Free surface Green function and its approximation by polynomial series, Bureau Veritas' Research Report No. 641 DTO/XC, Bureau Veritas, France, 1991.
- 7 Noblesse F, Delhommeau G, Huang F, Yang C. Practical mathematical representation of the flow due to a distribution of sources on a steadily advancing ship hull, J. Engrg. Math. 71 (4) (2011) 367-392.
- 8 Wu H, Zhang C, Zhu Y, Li W, Wan D, Noblesse F. A global approximation to the Green function for diffraction radiation of water waves [J], European J mech. / B Fluids 65 (2017) 54-64.
- 9 Shan P, Zhu R, Wang F, Wu J. Efficient approximation of free-surface Green function and OpenMP parallelization in frequency-domain wave-body interactions[J], Journal of Marine Science and Technology, 2018 (1):1-11.
- 10 Alpaydin E. Introduction to machine learning (Adaptive computation and machine learning series) [M]. Cambridge: MIT Press, 2004.
- 11 Bishop C M, Roach C M. Fast curve fitting using neural networks [J]. Review of scientific instruments, 1992, 63(10): 4450-4456.
- 12 洪亮, 朱仁传, 缪国平, 等. 三维频域有航速格林函数的数值计算与分析[J]. 水动力学研究与进展, A 辑, 2013, 28(4):423-430.

Machine learning for radiation-diffraction Green's function and prediction

ZHU Peng-yuan¹, ZHU Ren-chuan², HUANG Shan²

1. Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing, 100084; 2. Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 2000240, Email: renchuan@sjtu.edu.cn

Abstract: Multilayer perceptron (MLP) Green's function prediction model is proposed and established by machine learning. In this paper non-dimensional pulsation source Green's function of radiation-diffraction waves is derived. The samples of Green's function computed by numerical integration in advance are used for training MLP model. The MLP Green's function prediction model is validated by the precision comparisons. It is a new approach to improve hydrodynamic solution with high efficiency.

Key words: Green's function; Free surface; Radiation-diffraction waves; Machine learning