

海床运动兴波的数值模拟

房克照^{1*}, 范浩煦¹, 刘忠波², 孙家文^{1, 3}

(1. 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 大连, 116000, Email: kfang@dlut.edu.cn; 2. 大连海事大学 交通运输工程学院, 大连 116026; 3. 国家海洋环境监测中心 海域管理技术重点实验室, 大连 116023)

摘要: 对新型双层 Boussinesq 水波方程进行扩展使其能够考虑海床运动。针对扩展后的高精度方程, 建立了有限差分方法求解的立面二维数值模型。利用数值模型对由局部海床垂向运动和沿斜坡海岸加减速运动诱发的兴波进行了数值模拟, 计算结果与解析解、物理模型实验数据及其他类模型结果进行对比并进行了分析。

关键词: 海床运动; Boussinesq 方程; 色散性; 非线性

1 引言

水下地震和海底滑坡引起的海底变形是海啸最常见的发生机制, 如 Fuhrman 和 Madsen^[1], Dutykh 和 Kalisch 等^[2]的研究。由于海啸的直接冲击、径流、漫顶和随后的洪水, 海啸可能在沿海地区引发毁灭性的灾害。在过去的几十年中, 人们经过大量的研究开发出用于评估、控制和减轻海啸灾害的数值模型。地震或滑坡产生的滑坡体在演化过程中是可变形的, 通常为固体物质和水混合而成的泥石流, 因此对底部运动的精确建模相当具有挑战性。为了简化, 可将滑坡体视为具有预设形状和运动条件的刚性块体, 然后将其轻松地集成到适合的波浪模型中, 来模拟海啸的生成和传播过程。许多研究采用了这种方法, 并取得了相当好的模拟结果, 如 Grilli 和 Watts^[3], Fuhrman 和 Madsen^[1], Sue 等^[4], Tjandra 和 Pudjaprasetya^[5], Whittaker 等^[6], Lynett 和 Liu^[7]的研究。

Boussinesq 类数值模型由于具有较好的非线性和色散性, 被广泛应用于模拟海啸生成和传播。近年来, 基于 Boussinesq 类方程的海床运动引起海啸的数值模型逐渐增多, 如 Lynett 和 Liu^[8], Ataie-Ashtiani 和 Yavari-Ramshe^[9], Fuhrman 和 Madsen^[1], Zhao 等^[10], Dutykh 和 Kalisch^[2]的研究。

本文重点讨论了 Liu 和 Fang^[11]二维双层 Boussinesq 水波方程的推广, 增加了随时间变化的水深项, 并建立了一个立面二维模型 (有限差分法), 用于模拟水底变形产生非线性色散波的生成和传播。理论分析表明, 双层模型展现了良好的线性和非线性性能, 而且其对应的数值模型也能初步印证方程在深水时的色散性和变浅性等基本理论特性。Liu 和 Fang 最近于 2019 年发表了该模型模拟重力自由表面波时精度的研究。本文将介绍该模型应用于

海床运动产生波浪的研究，介绍控制方程和数值方法，并进行了数值实验，将结果与理论解、实验结果和以往文献中的数值结果进行比较。

2 双层 Boussinesq 模型

2.1 水底随时间变化的双层 Boussinesq 方程

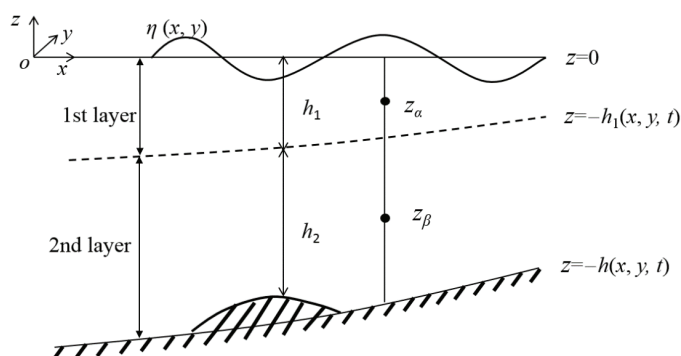


图1 水底随时间变化的双层 Boussinesq 波模型示意图

虚线表示相邻两层之间的界面位置

在图1所示的笛卡尔坐标系下，推导出滑坡生成波的双层 Boussinesq 模型，其中 x 轴和 y 轴位于静水平面， z 轴垂直向上。在恒定密度、不可压缩和无旋的均质流体的假设下，忽略粘性和表面张力效应的影响，根据 Liu 和 Fang^[1]的相同过程，可推导出滑坡生成波控制方程的立面二维形式，如下所示：

满足连续性条件及动力学边界条件的控制方程：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w_\eta - u_\eta \eta_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_\eta}{\partial t} = -g\eta_x - \frac{1}{2}(u_\eta^2 + 2u_\eta w_\eta \eta_x)_x - \eta_x \frac{\partial w_\eta}{\partial t} + w_\eta (u_\eta \eta_x)_x \quad (2)$$

自由表面上的速度分量：

$$u_\eta = u_{10} + \eta w_{10x} - \frac{1}{2}\eta^2 u_{10xx} - \frac{1}{6}\eta^3 w_{10xxx} \quad (3)$$

$$w_\eta = w_{10} - \eta u_{10x} - \frac{1}{2}\eta^2 w_{10xx} + \frac{1}{6}\eta^3 u_{10xxx} \quad (4)$$

静水面速度分量的计算公式：

$$u_{10} = u_1^* - \sigma_1 u_{1xx}^* + \sigma_2 w_{1x}^* - \sigma_3 w_{1xxx}^* - \sigma_4 u_{1x}^* + \sigma_5 u_{1xxx}^* - \sigma_6 w_{1xx}^* \quad (5)$$

$$w_\eta = w_{10} - \eta u_{10x} - \frac{1}{2} \eta^2 w_{10xx} + \frac{1}{6} \eta^3 u_{10xxx} \quad (6)$$

相邻两层界面上的速度匹配条件:

$$\begin{aligned} u_2^* - \sigma_7 u_{2xx}^* + \sigma_8 w_{2x}^* - \sigma_9 w_{2xxx}^* - \sigma_{10} u_{2x}^* + \sigma_{11} u_{2xxx}^* (1 - c_1) - \sigma_{12} (1 - \frac{1}{4} c_1) w_{2xx}^* \\ = u_1^* - \sigma_1 u_{1xx}^* - \sigma_2 w_{1x}^* + \sigma_3 w_{1xxx}^* + \sigma_4 u_{1x}^* - 3\sigma_5 u_{1xxx}^* - \frac{3}{2} \sigma_6 w_{1xx}^* \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w_2^* - \sigma_7 w_{2xx}^* - \sigma_8 u_{2x}^* + \sigma_9 u_{2xxx}^* - \sigma_{10} w_{2x}^* + \sigma_{11} (1 - c_1) w_{2xxx}^* + \sigma_{12} (1 - \frac{1}{4} c_1) u_{2xx}^* \\ = w_1^* - \sigma_1 w_{1xx}^* + \sigma_2 u_{1x}^* - \sigma_3 u_{1xxx}^* + \sigma_4 w_{1x}^* - 3\beta_{13} \sigma_5 w_{1xxx}^* + \frac{3}{2} \beta_{12} \sigma_6 u_{1xx}^* \end{aligned} \quad (8)$$

水底处运动条件:

$$\begin{aligned} w_2^* - \sigma_7 w_{2xx}^* + \sigma_8 u_{2x}^* - \sigma_9 u_{2xxx}^* + \sigma_{10} w_{2x}^* - 3\beta_{N3} \sigma_{11} (1 + \frac{1}{3} c_1) w_{2xxx}^* \\ + \frac{3}{2} \beta_{N2} \sigma_{12} (1 + \frac{1}{6} c_1) u_{2xx}^* + h_x (u_2^* - \sigma_7 u_{2xx}^* - \sigma_8 w_{2x}^* + \sigma_9 w_{2xxx}^*) = -h_t \end{aligned} \quad (9)$$

可以注意到在式(9)的右侧增加了随时间变化水深项 $-\partial h/\partial t$ 。之前 Liu 和 Fang(2016)假设该项为零,这是本文研究中唯一的变化。在上述方程中, η 是从平均水位测得的波面高程, (u_η, w_η) 和 (u_{10}, w_{10}) 分别是自由水面和静止水面上的速度分量, $(u_i^*, w_i^*) (i=1,2)$ 是在两层中定义的计算速度分量;下标 x 表示关于 x 求导; g 是重力加速度。

$c_1 = -\frac{2\alpha_1}{2\alpha_1 + \alpha_2}$, $\sigma_i (i=1, 2, \dots, 12)$ 为:

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \alpha_1 h, \sigma_8 = \alpha_2 h, \sigma_1 = \frac{2}{5} \sigma_2^2, \sigma_7 = \frac{2}{5} \sigma_8^2, \sigma_3 = \frac{1}{15} \sigma_2^3, \sigma_9 = \frac{1}{15} \sigma_8^3, \sigma_4 = \alpha_1^2 h h_x, \\ \sigma_5 = \frac{1}{5} \alpha_1^4 h^3 h_x, \sigma_6 = \frac{4}{5} \alpha_1^3 h^2 h_x, \sigma_{10} = (2\alpha_1 + \alpha_2) \sigma_8 h_x, \sigma_{11} = \frac{1}{5} \sigma_8^2 \sigma_{10}, \sigma_{12} = \frac{4}{5} \sigma_8 \sigma_{10}. \end{aligned} \quad (10)$$

系数取值为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{22}, \beta_{23}) = (0.1053, 0.3947, 0.92, 0.85, 0.937, 0.607)$$

理论分析表明,该模型(方程(1)-(9))具有很好的线性、非线性、变浅性和传播特性(从极端深水到浅水)。关于双层 Boussinesq 方程的推导和分析的更多细节,请参阅 Liu 和 Fang^[11]。值得注意的是,模型中暂时没有考虑波浪破碎和底部摩擦,本文中研究的所有滑坡模拟都是针对非破碎波浪,并且没有考虑摩擦效应。

2.2 数值格式

以上方程中的最高空间导数为 3,时间步进格式采用混合四阶预测-校正的 Adams-Bashforth-Moulton 格式。在预报阶段,利用三阶 Adams-Bashforth 格式求解方程(1)和(2),可以得到波面和波面处水平速度的预报值;进一步求解方程(3)、(5)、(7)分别得到水平速度 u_0 、 u_1^* 和 u_2^* 的预报值;进一步求解方程(9)、(8)、(6)、(4)可以分别得到垂向速度 w_2^* 、 w_1^* 、 w_0 和 w_η 的预报值。校正阶段利用四阶 Adams-Moulton 格式求解得到波面和波面处水平速度的校正值,其他过程类似。当所有变量的校正值与预报值在设定的误差 0.0001 内,进入下一时间步,否则更新校正值,重新校正过程。空间导数格式则完全采用

与 FUNWAVE 类似的数值格式，这里不再赘述。

除以上边界条件外，本研究中还要模拟海岸上海啸的爬高，这对沿海地区海啸的模拟至关重要。双层 Boussinesq 模型使用 Lynett 等^[13]提出的线性外推法，设置最小水深为 0.0001 m 识别计算域中的干湿边界。Lynett 等提到该方法在数值上是稳定的，本文的数值模拟也证实了这一点。

3 计算结果

3.1 局部海床凸起和凹陷

对本模型的第一次检验，模拟了 Hammack^[12]于 1973 年进行的恒定水深局部海床凸起和凹陷的物理模型实验。对随时间变化水深的描述如下：

$$h(x, t) = d_0 - \zeta_0(1 - e^{-\alpha t})H(b^2 - x^2) \quad (11)$$

式中 H 为阶跃函数， $d_0=0.05$ m 为静水水深， $b=0.61$ m 为水底凸起或凹陷部分的长度， $\zeta_0 = \pm 0.005$ m 为垂直运动幅度，正负分别表示凸起或凹陷。模拟中设定网格尺寸为 0.0125 m，时间步长为 0.005 s。

图 2 中给出了局部海床凸起的计算结果，与 2009 年 Fuhrman 和 Madsen 的高精度 Boussinesq 模型^[1]的实验数据和数值模拟结果进行了比较（在图中称为 FM2009）。Fuhrman 和 Madsen 使用的 Boussinesq 模型的高精度已经有了很好的验证，而且该 Boussinesq 模型的适用范围包含于本文的双层 Boussinesq 模型，所以该模型的模拟结果可以用作基准。如图 2 所示，两个 Boussinesq 模型具有几乎相同的数值性能。双层 Boussinesq 模型很好地再现了滑坡产生的波浪，如图 2 ((a) 和 (b)) 所示。在远离生成位置（如图 2 (c) 和 (d)) 的区域，波的形状仍然可以用 Boussinesq 模型很好地模拟，但是波幅和波速偏高。Hammack 认为，这是实验中的能量耗散造成的，而两个数值模型都没有考虑。局部海床凹陷的计算结果如图 3 所示，并与 Fuhrman 和 Madsen 的高精度 Boussinesq 模型的实验数据和数值结果进行了比较。利用本文的双层 Boussinesq 模型对近场波进行了数值模拟，结果表明该模型在海床凹陷作用下产生了准确的近场波。由于数值模型中没有能量耗散机制，远场波与测量值存在明显的偏差。目前，Fuhrman 和 Madsen 的高精度 Boussinesq 模型和双层 Boussinesq 模型在这种情况下几乎具有相同的表现。其中远场的可见差异可能是控制方程或数值方法的不同导致的。

Hammack 还提出了相同情况下线性化欧拉方程的解析解^[12]。将双层 Boussinesq 模型和 FM2009 线性模型模拟的计算结果，分别与图 4 中局部海床凸起和图 5 中局部海床凹陷的解析解进行比较。两种 Boussinesq 模型的差异可以忽略不计，模拟结果与解析解吻合较好，证明了数值模型的准确性。

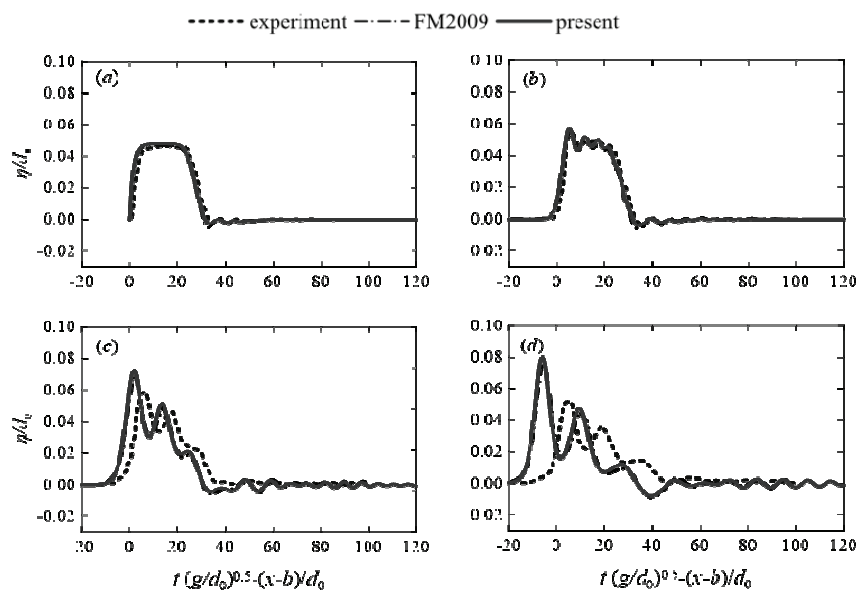


图2 对(a) $(x-b)/h_0=0$, (b)20, (c)180 和(d)400 位置处局部海床凸起生成波浪的模拟
(实线:线性双层 Boussinesq 模型;点划线: FM2009 的高精度 Boussinesq 模型计算结果;虚线: Hammack 的实验结果)

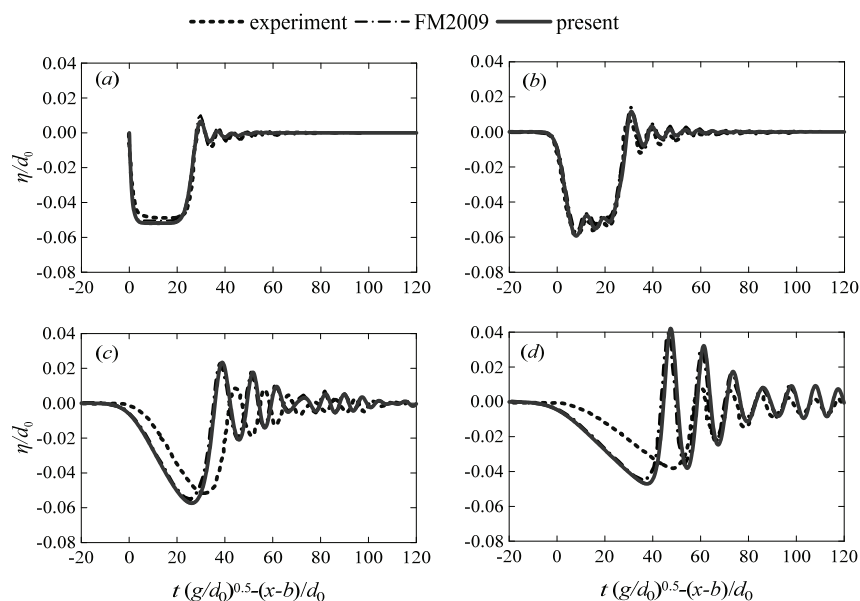


图3 对(a) $(x-b)/h_0=0$, (b)20, (c)180 和(d)400 位置处局部海床凹陷生成波浪的模拟
(实线:线性双层 Boussinesq 模型;点划线: FM2009 的高精度 Boussinesq 模型计算结果;虚线: Hammack 的实验结果)

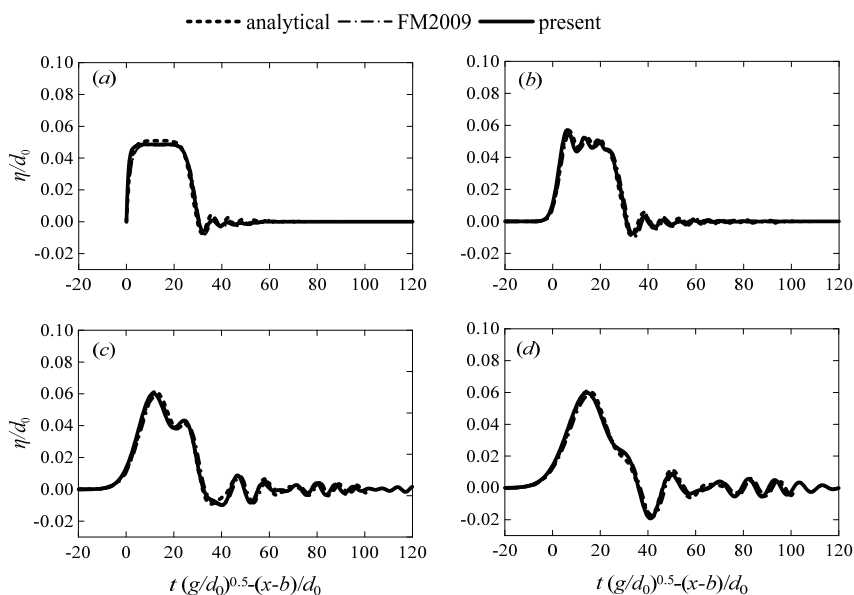


图4 对(a) $(x-b)/h_0=0$, (b) 20, (c) 180 和(d) 400 位置处局部海床凸起生成波浪的模拟
(实线: 线性双层 Boussinesq 模型; 点划线: FM2009 的线性 Boussinesq 模型计算结果; 虚线: Hammack 的解析解)

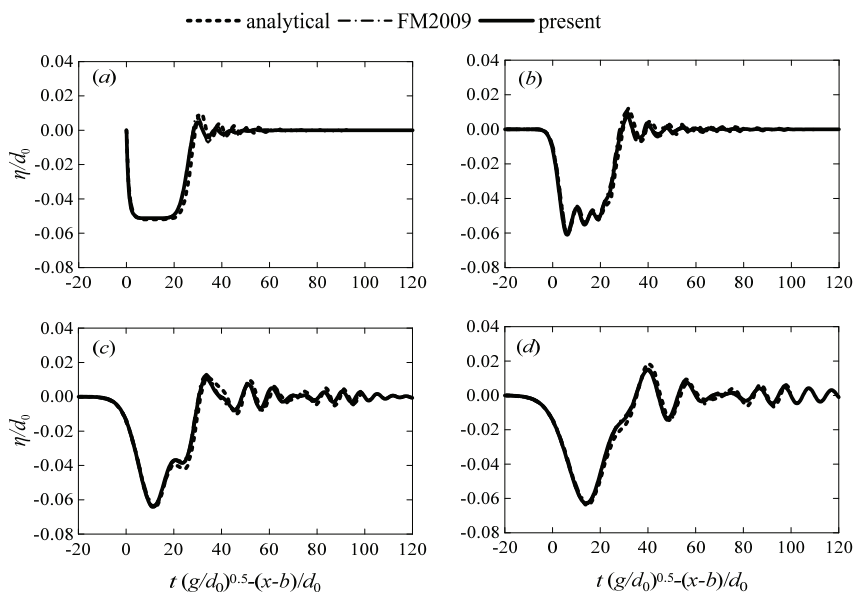


图5 对(a) $(x-b)/h_0=0$, (b) 20, (c) 180 和(d) 400 位置处局部海床凹陷生成波浪的模拟
(实线: 线性双层 Boussinesq 模型; 点划线: FM2009 的线性 Boussinesq 模型计算结果; 虚线: Hammack 的解析解)

3.2 均匀斜坡海滩上滑坡体运动兴波

本案例最初由 Lynett 和 Liu^[13]利用数值方法模拟了均匀斜坡上滑坡体运动时产生的波浪,后来由 Fuhrman 和 Madsen^[1]使用 Boussinesq 类模型进行了模拟。如图 6 所示,滑坡的时间历程描述如下:

$$h(x, t) = [\tan \theta]x - \frac{\Delta h}{4} \{1 + \tanh[2 \cos(x - x_l(t))]\} \{1 - \tanh[2 \cos(x - x_r(t))]\} \quad (12)$$

其中

$$x_l(t) = x_0 + s(t) \cos \theta - \frac{b}{2} \cos \theta, \quad x_r(t) = x_0 + s(t) \cos \theta + \frac{b}{2} \cos \theta \quad (13)$$

式中 θ 为坡面角度, Δh 为下滑的最大垂直高度, x_l 为左侧拐点位置, x_r 为右侧拐点位置, b 为 x_l 与 x_r 之间沿坡面的长度。式中 x_0 是滑动体的初始位置,

$$s(t) = S_0 \ln \left(\cosh \left(\frac{t}{t_0} \right) \right) \quad (14)$$

此处使用的参数与 Fuhrman 和 Madsen^[1]使用的参数相同,例如 $\theta=6^\circ$, $h_0=1.0$ m, $x_0=2.379$ m, $S_0=4.712$ m 和 $t_0=3.713$ s。

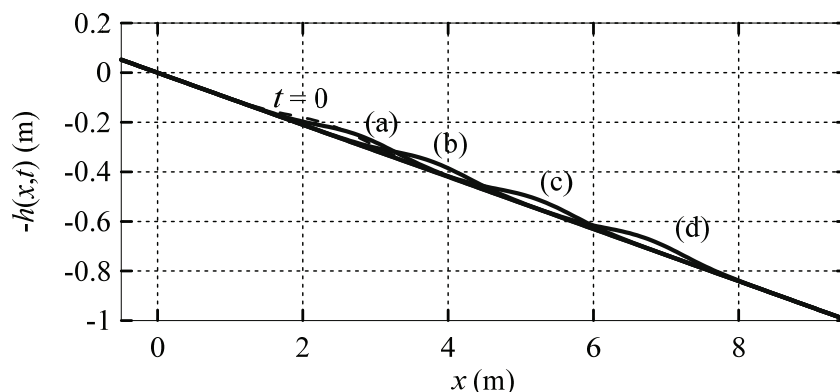


图 6 水下滑坡的滑动体在(a) $t=1.51$ s, (b) $t=3.00$ s, (c) $t=4.51$ s 和(d) $t=5.86$ s 时的形态^[7]

选取计算域长 25 m, 离散为 0.05 m 的均匀网格, 设置时间步长为 0.005 s。将本文双层 Boussinesq 模型与 Fuhrman 和 Madsen^[1]的 Boussinesq 模型的计算结果在图 7 中的四个时刻进行对比, 此外还增加了 Lynett 和 Liu^[13]的边界积分方程模型 (BIEM) 结果作为参考。BIEM 模型基于完全非线性势理论, 它在模拟波浪传播方面的精度已经得到了很好的验证^[14-15]。从图 7 可以看出, 3 个模型的模拟结果同一性很好, 这验证了双层 Boussinesq 模型在模拟滑坡体运动兴波的生成、传播甚至爬高方面的准确性。

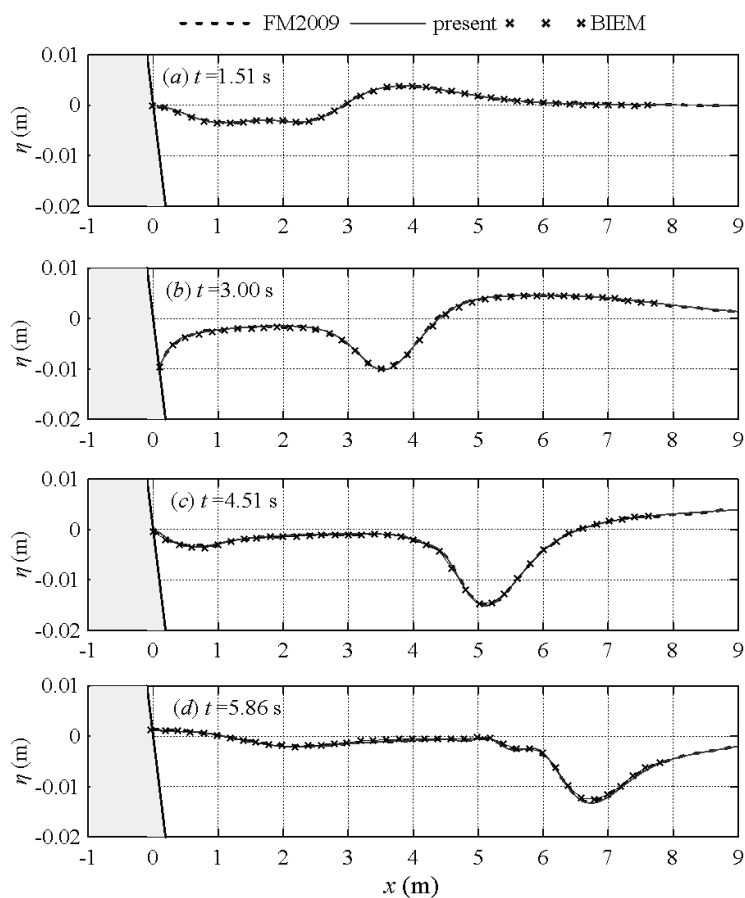


图7 在(a) $t=1.51$ s, (b) $t=3.00$ s, (c) $t=4.51$ s 和(d) $t=5.86$ s时刻波浪形态的比较
(实线: 双层 Boussinesq 模型; 虚线: Fuhrman 和 Madsen 的高精度 Boussinesq 模型; 叉号: BIEM 模型结果)

4 结论

作者最近开发的双层 Boussinesq 模型^[11]被扩展到地震和滑坡产生波浪的生成、传播和爬高研究, 只需在运动方程中添加一个水深随时间变化项即可成立。本模型的计算结果也与文献中的其他模拟结果进行了比较, 验证了局部海床垂向运动和沿斜坡海岸加减速运动生成波浪的精确性, 与解析解和实验数据的一致性。对于本文中的案例, 双层 Boussinesq 模型与 Fuhrman 和 Madsen 的高精度 Boussinesq 模型^[1]非常吻合, 与 BIEM 结果^[16]吻合良好。该模型还较准确地捕捉到了移动的海岸线, 但还需要进一步的实验验证。值得一提的是, 只要滑坡的初始形状和变形已知, 并且可以输入波浪模型, 本模型也适用于模拟可变形滑坡体运动诱发的波浪模拟。

参 考 文 献

- 1 Fuhrman, D.R., Madsen, P.A., 2009. Tsunami generation, propagation, and run-up with a high-order Boussinesq model. *Coastal Engineering* 56 (7), 747-758.
- 2 Dutykh, D., Kalisch, H., 2013. Boussinesq modeling of surface waves due to underwater landslides. *Nonlin. Processes Geophys.* 20 (3), 267-285.
- 3 Grilli, S.T., Watts, P., 1999. Modeling of waves generated by a moving submerged body. Applications to underwater landslides. *Eng. Anal. Bound. Elem* 23, 645-656.
- 4 Sue, L.P., Nokes, R.I., Davidson, M.J., 2011. Tsunami generation by submarine landslides: comparison of physical and numerical models. *Environ Fluid Mech* 11 (2), 133-165.
- 5 Tjandra, S.S., Pudjaprasetya, S.R., 2015. A non-hydrostatic numerical scheme for dispersive waves generated by bottom motion. *Wave Motion* 57 (0), 245-256.
- 6 Whittaker, C.N., Nokes, R.I., Lo, H.Y., L.-F. Liu, P., Davidson, M.J., 2017. Physical and numerical modelling of tsunami generation by a moving obstacle at the bottom boundary. *Environ Fluid Mech* 17 (5), 929-958.
- 7 Lynett, P., Liu, P.L.F., 2005. A numerical study of the run-up generated by three-dimensional landslides *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH* 110,
- 8 LYNETT P, LIU P L F. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up//*Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 2002*[C], 458(2028): 2885-2910.
- 9 Ataie-Ashtiani, B., Yavari-Ramshe, S., 2011. Numerical simulation of wave generated by landslide incidents in dam reservoirs. *Landslides* 8 (4), 417-432.
- 10 Zhao, X., Wang, B., Liu, H., 2009. Modelling the submarine mass failure induced Tsunamis by Boussinesq equations. *Journal of Asian Earth Sciences* 36 (1), 47-55.
- 11 Liu, Z.B., Fang, K.Z., 2016. A new two-layer Boussinesq model for coastal waves from deep to shallow water: Derivation and analysis. *Wave Motion* 67, 1-14.
- 12 Hammack, J.L., 1973. A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth. *J Fluid Mech* 60 (4), 769-799.
- 13 Lynett, P.J., Liu, P.L.F., 2002. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up. *Proc. R. Soc. Lond. A* 458, 2885-2910.
- 14 Gobbi, M.F., Kirby, J.T., 1999. Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model. *Coastal Engineering* 37 (1), 57-96.
- 15 Grilli, S.T., Vogelmann, S., Watts, P., 2002. Development of a 3D numerical wave tank for modeling tsunami generation by underwater landslides. *Eng. Anal. Bound. Elem* 26, 301-313.
- 16 Grilli, S.T., Watts, P., 2005. Tsunami Generation by Submarine Mass Failure. I: Modeling, Experimental Validation, and Sensitivity Analyses. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* 131 (6),

283-297.

17 房克照, 尹晶, 孙家文, 2017. 基于二维浅水方程的滑坡体兴波数值模型. 28(1), 96-105.

A numerical simulation of waves generated by bottom movement

FANG Ke-zhao^{1*}, FAN Hao-xun¹, LIU Zhong-bo², SUN Jia-wen^{1,3}

(1.The State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116000, Liaoning, Email: kfang@dlut.edu.cn; 2. Transportation Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian, 116026, Liaoning; 3.National Marine Environmental Monitoring Center, State Oceanic Administration, Key Laboratory of Marine Management Technology, Dalian 116023, Liaoning)

Abstract: In this work a recently proposed multi-layer Boussinesq water wave equation is extended to include the seabed movement. The vertical two-dimensional model solved by the finite difference method is established for the extended highly-accurate equation. For the typical waves generated by vertical sea bottom motion and sliding along a slope, the numerical simulations are carried out. The results are compared with various analytical, experiments and other numerical simulations in literature, with reasonable agreements are found.

Key words: Bottom movement; Boussinesq wave equations; Dispersion; Nonlinearity