

基于圆柱入水的孤立波生成新方法及其 数值模拟检验

贺铭¹，高喜峰¹，徐万海¹，任冰²

- (1. 天津大学水利工程仿真与安全国家重点实验室，天津，300350, Email: xuwanhai@tju.edu.cn
2. 大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室，大连，116024)

摘要：为提高造波效率和减弱波浪二次反射作用，在一些波浪水池中安装了冲击式造波装置，但如何控制冲击体运动来生成波形稳定、波高可控的孤立波是尚未解决的难题。本文提出并验证了一种基于圆柱浸没体积等于孤立波体积原理的新式孤立波生成方法。首先推导了计算圆柱位移时程的隐式方程组以及生成波高受圆柱半径的约束条件。接着采用光滑粒子流体动力学方法模拟并比对了文献中的物理实验。最后应用验证过的数值模型计算了圆柱入水生成的孤立波波面和水质点水平速度的空间分布。与解析理论比较证实，利用所提出的造波理论能够生成波形、流速准确且无明显尾波迹象的高质量孤立波。更为重要的是孤立波自生成起便已达到稳定，因此能够缩短测量和模拟孤立波对结构物作用时结构物与造波装置间的距离，既节约了实验场地空间，也提升了数值计算效率。

关键词：孤立波；造波理论；物体入水；数值波浪水槽；光滑粒子流体动力学

1 引言

孤立波是一种波形完全位于静水面以上且波长趋于无限的永行波，是描述自然界中海啸灾害的重要波浪理论。实验室通常采用 Goring^[1]方法制造孤立波，其令推板造波机的运动速度等于板前水质点水平运动速度的深度平均值，即对流体施加一个速度边界条件。在此基础上，使用 Rayleigh 近似解替代 Boussinesq 理论^[2]或考虑波浪生成初期的非稳态传播特性^[3]均可进一步提升推板所造孤立波的质量。出于造波效率和波浪二次反射的考虑，一些波浪水池（特别是深水水池）中安装了冲击式造波装置。尽管利用冲击体入水是实验室中最早采用的孤立波制造方法^[4]，后续也开展过不少关于冲击体尺寸、初始高度等参数对生成波面、波周期、速度场等物理量影响规律的研究^[5-6]，但由冲击体在自重和流体浮力的作用下自由下落将不可避免地产生非稳态波浪，影响孤立波的生成质量。因此合理地控制

冲击体运动轨迹至关重要。以此为出发点, 本文以 1/4 圆柱体入水为例, 介绍了一种基于冲击体浸没体积等于波浪体积原理的孤立波生成新方法。

对所提出造波理论的检验由光滑粒子流体动力学 (SPH) 方法^[7-8]来实现。SPH 方法是一种 Lagrangian 型的无网格数值方法, 在处理强非线性自由水面和复杂流固交界面问题上具有显著的优势, 也因此海洋、海岸工程领域获得了广泛的青睐^[9]。本次研究选用 SPH 方法, 正是考虑其既能便捷地模拟圆柱入水时干湿交界面的变化过程, 也能准确地重现强非线性孤立波面的生成和传播。

2 孤立波制造理论

初始时刻将圆柱升至水面以上, 并使其最低点与静水位高度相等。随后下降圆柱, 产生如图 1 所示的逐渐远离圆柱的孤立波。圆柱下降过程中存在以下体积守恒关系:

$$V_{f1} + V_{f2} = V_s \quad (1)$$

式中: V_{f1} 为孤立波面与静水面间的流体体积; V_{f2} 为静水位以上的圆柱湿表面与静水面间的流体体积; V_s 为圆柱浸没体积。

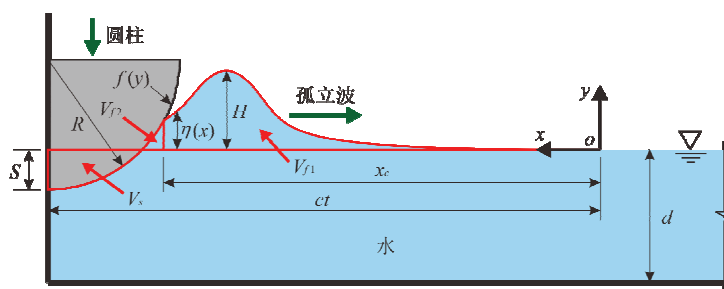


图 1 圆柱浸没体积与孤立波体积间的守恒关系

定义随孤立波匀速移动的直角坐标系 $o-xy$, x 轴指向圆柱, y 轴垂直静水面向上。于是 V_{f1} 可按式计算:

$$V_{f1} = \int_0^{x_c} \eta(x) dx \quad (2)$$

式中: x_c 为圆柱干湿表面交界点的水平坐标; $\eta(x)$ 为孤立波的波面升高, 根据 Boussinesq 方程的一阶近似有

$$\eta(x) = H \operatorname{sech}^2(kx - \pi) \quad (3)$$

式中: H 为波高; $k = (3H/4d^3)^{1/2}$ 为有效波数, d 为水深; 波浪相位取 $-\pi$ 是为了近似满足 $\eta(0) = 0$ 。将式(3)代入式(2), 积分得到

$$V_{f1} = \frac{2H}{k(e^{2\pi-2kx_c} + 1)} - \frac{2H}{k(e^{2\pi} + 1)} \quad (4)$$

V_{f2} 和 V_s 可分别按下式计算:

$$V_{f2} = \int_0^{\eta(x_c)} [f(y) - x_c] dy; \quad V_s = \int_{-S}^0 [ct - f(y)] dy \quad (5)$$

式中: c 为波速; t 为时间; S 为圆柱浸没深度; $f(y)$ 为圆柱表面函数, 服从

$$[f(y) - ct]^2 + [y - (R - S)]^2 = R^2 \quad \text{且} \quad f(y) \leq ct \text{ 和 } y \leq (R - S) \quad (6)$$

其中 R 为圆柱半径。将式(6)代入式(5), 得到

$$V_{f2} = (ct - x_c)\eta(x_c) - \frac{\eta(x_c) - R + S}{2} \sqrt{R^2 - [\eta(x_c) - R + S]^2} \\ - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{\eta(x_c) - R + S}{R} - \frac{R - S}{2} \sqrt{2RS - S^2} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{R - S}{R} \quad (7)$$

$$V_s = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R - S}{2} \sqrt{2RS - S^2} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{R - S}{R} \quad (8)$$

再将式(4)、式(7)和式(8)代入式(1), 整理后有

$$\frac{\pi R^2}{4} = \frac{2H}{k(e^{2\pi-2kx_c} + 1)} - \frac{2H}{k(e^{2\pi} + 1)} + (ct - x_c)\eta(x_c) \\ - \frac{\eta(x_c) - R + S}{2} \sqrt{R^2 - [\eta(x_c) - R + S]^2} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{\eta(x_c) - R + S}{R} \quad (9)$$

上式含有 x_c 和 S 两个随时间 t 改变的未知物理量, 因此需补充一个关系式来闭合。将圆柱干湿表面交界点的横纵坐标值($x_c, \eta(x_c)$)代入由式(6)描述的圆柱表面方程, 得到

$$x_c = ct - \sqrt{R^2 - [\eta(x_c) - (R - S)]^2} \quad (10)$$

利用拟牛顿法和全选主元高斯消去法求解由式(9)和式(10)组成的隐式方程组, 可获得任意时刻圆柱的下降高度 S 。

3 孤立波限制条件

利用圆柱入水制造孤立波受 4 个条件的限制。其一, 如果圆柱半径 R 小于水深 d , 圆柱的最大浸没深度不应大于半径, 即圆柱浸没体积存在以下上限

$$V_s \leq \frac{\pi R^2}{4} \quad (11)$$

在孤立波发育完全后并与圆柱分离的时刻，有

$$V_{f1} = \int_0^\infty H \operatorname{sech}^2(kx - \pi) dx \approx \frac{2H}{k}; \quad V_{f2} = 0 \quad (12)$$

将式(11)和式(12)代入式(1)，整理得到：

$$L_1: \frac{H}{d} \leq \frac{3\pi^2}{256} \left(\frac{R}{d}\right)^4 \quad \text{当} \quad \frac{R}{d} \leq 1 \quad (13)$$

其二，对于半径 R 大于水深 d 的圆柱，其最大浸没深度不能超过水深，则有

$$V_s \leq \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R-d}{2} \sqrt{2Rd-d^2} - \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{R-d}{R} \quad (14)$$

将式(12)和式(14)代入式(1)，整理得到：

$$L_2: \frac{H}{d} \leq \left[\frac{\sqrt{3}\pi}{16} \left(\frac{R}{d}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{R}{d} - 1\right) \sqrt{\frac{2R}{d} - 1} - \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{R}{d}\right)^2 \arcsin \left(1 - \frac{d}{R}\right) \right]^2 \quad \text{当} \quad \frac{R}{d} \geq 1 \quad (15)$$

其三，如图 2 所示，孤立波波面的最小曲率半径 $\Omega_{\min}$ 不宜小于圆柱的曲率半径 R ：

$$\Omega_{\min} \geq R \quad (16)$$

否则波面将由于过度凹陷而与圆柱间形成空隙，以致波面在重力作用下坍塌，影响生成波浪的稳定性。

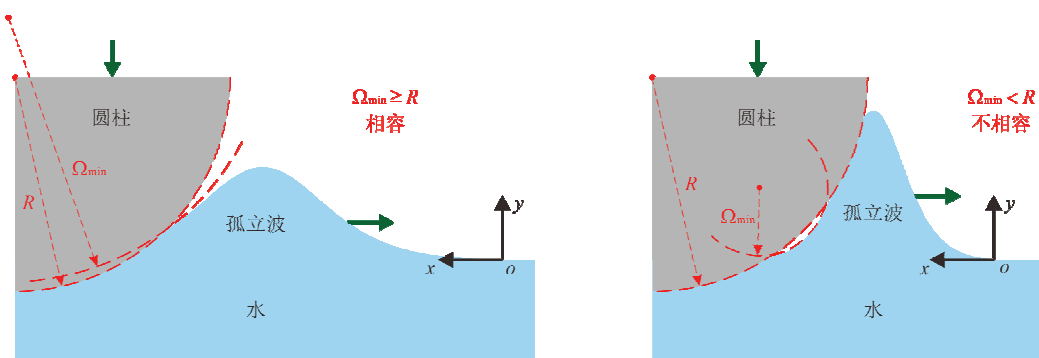


图 2 圆柱表面与孤立波波面间的相容关系

波面曲率半径的定义为

$$\Omega(x) = \left[1 + \eta'(x)^2 \right]^{3/2} / |\eta''(x)| \quad (17)$$

式中： $\eta'(x)$ 和 $\eta''(x)$ 分别为波面升高 $\eta(x)$ 在 x 方向的一阶和二阶导数。基于式(17)求解 $\Omega'(x) = 0$ 十分困难，因此在计算波面曲率极值时近似取

$$\Omega(x) \approx 1/|\eta''(x)| \quad (18)$$

这是因为孤立波的波长趋于无限，波面梯度 $\eta'(x)$ 是一个小量，其高次幂 $\eta'(x)^2$ 可忽略不计。

于是

$$\Omega'(x) = \frac{\cosh^3(kx - \pi) \sinh(kx - \pi) [\cosh(2kx - 2\pi) - 5]}{Hk [\cosh(2kx - 2\pi) - 2]^2} \operatorname{sgn} [\cosh(2kx - 2\pi) - 2] \quad (19)$$

其中 sgn 为阶跃函数。令式(19)等于零, 解得由小到大的 5 个根:

$$x_1 = \frac{\pi}{k} - \frac{\cosh^{-1}(5)}{2k}; x_2 = \frac{\pi}{k} - \frac{\cosh^{-1}(2)}{2k}; x_3 = \frac{\pi}{k}; x_4 = \frac{\pi}{k} + \frac{\cosh^{-1}(2)}{2k}; x_5 = \frac{\pi}{k} + \frac{\cosh^{-1}(5)}{2k} \quad (20)$$

由图 3 可见, x_2 和 x_4 处对应波面拐点, Ω 无穷大。 x_3 处 Ω 虽有最小值, 但曲率圆在波面下方, 同理 x_1 处虽为 Ω 的极小值点, 但曲率圆在波浪前端。考虑到圆柱与波面的相对空间位置, 可知圆柱表面与波面不相容的情况只可能发生在 x_5 处。于是, 将 $x = x_5$ 代入式(18)得到

$$\Omega_{\min} = \frac{3}{2Hk^2} \quad (21)$$

再将式(21)代入式(16), 整理后有

$$L_3: \frac{H}{d} \leq \sqrt{\frac{2d}{R}} \quad (22)$$

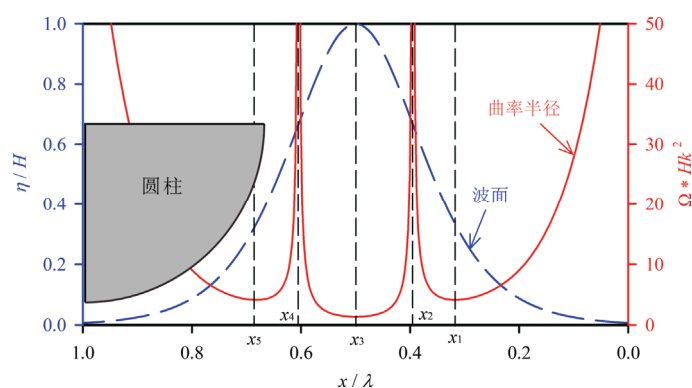


图 3 孤立波波面与曲率半径

其四, 孤立波波高应小于极限波高, 即

$$L_4: \frac{H}{d} \leq \varepsilon \quad (23)$$

式中: $\varepsilon = 0.78$ 为 McCowan^[10]提出的孤立波破碎临界条件。

将 $L_1 \sim L_4$ 个限制条件绘于图 4 中, 阴影区域标示出在给定圆柱半径/水深比值 R/d 下孤立波波高/水深比值 H/d 的限制范围。可见利用圆柱入水制造的孤立波其最大 H/d 仅为 0.68, 且需 $R/d = 4.36$ 方可达到。而理论上 Goring^[1]和 Malek-Mohammadi 和 Testik^[3]的推板造波方法仅受到极限波高的限制, 能够制造相对较高的孤立波。

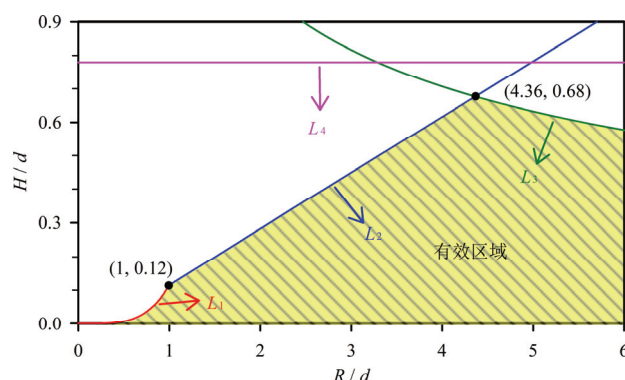


图4 孤立波相对波高受圆柱半径与水深比值的限制条件

4 数值模拟方法及验证

在应用 SPH 方法检验所提出的孤立波制造理论之前, 首先模拟了 Yu 和 Ursell^[11]的物理实验, 通过与实测结果的比较来验证数值模型的可靠性。实验在麻省理工学院水动力学实验室的波浪水槽中进行。水槽长 30.48 m、宽 76.2 cm、高 91.4 cm, 两端均安装有消波装置。实验水深 $d = 26.67$ cm 和 57.79 cm。水槽正中间设一个“U”形柱体。柱体下端是恰好浸没于水中的半圆体, 取 $R = 7.62$ cm 和 15.24 cm 两种半径。柱体上端是露出水面的矩形体, 高 10.16 cm, 长度与圆柱半径一致。实验中, U 形柱体以振幅 a 、周期 T 的简谐运动形式垂荡, 产生同时沿相反方向传播的两列规则波浪。使用匀速移动的浪高仪记录波包信息, 从中分离得到柱体垂荡运动产生的辐射波高。

鉴于该问题的空间对称性, 可取半个物理域进行计算。兼顾对数值计算效率的考虑, 建立了图 5 所示的长度为 3.5λ (λ 是波长) 的数值波浪水槽。水槽下游设置 1.5λ (λ 是波长) 长的海绵层, 通过减小其内流体粒子的加速度来减弱水槽末端的波浪反射作用。距水槽上游 1.8λ 处固定单根浪高仪 W_1 , 用以测量所生成规则波的波高。计算时, 流体运动由离散的质量守恒方程和动量方程控制, 并引入状态方程来建立流体密度和压强间的关系^[12]。水槽及柱体的固壁边界条件由动力学边界粒子方法实施^[13]。使用 δ -SPH 方法^[14]和人工黏性^[12]来提升压强场的稳定性, 同时人工黏性还提供了必要的流体物理黏度。采用 Symplectic 算法结合可变时间步长更新粒子信息^[15]。从 Yu 等^[11]的实验结果中获取 $R = 7.62$ cm、 $d = 26.67$ cm 和 $R = 15.24$ cm、 $d = 26.67$ cm 两组工况下柱体各振荡幅值 a 、周期 T 所对应的规则波波高 H 。采用 $H/\delta_p = 4$ 的粒子分辨率开展数值计算, 其中 δ_p 为初始粒子间距。

图 6 给出数值与实测波高的比较结果, 图 6 中用误差线表示 5% 的实验不确定度, 横坐标中 k_0 为规则波在深水中的波数。可以看到, 数值波高随 $k_0 R$ 的变化趋势与实测结果相吻合, 且不同 $k_0 R$ 下数值与实测波高的误差基本在 5% 以内, 因此证实了所用数值模型在计算柱体运动、波浪生成和传播问题上的可靠性。理论上, 使用更高的粒子分辨率可以得到更

加准确的计算结果，但鉴于小波高工况下计算效率过低，在验证数值模型时没有采用。

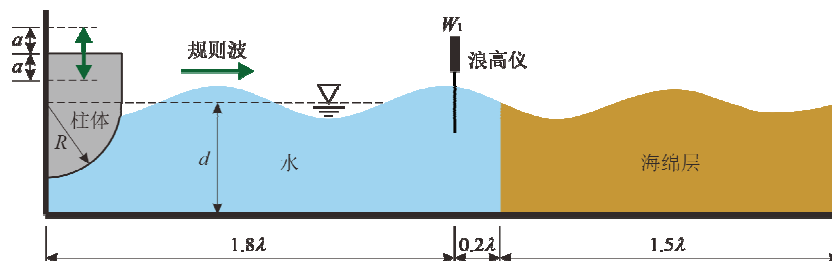


图5 垂荡圆柱生成规则波的数值模型设置

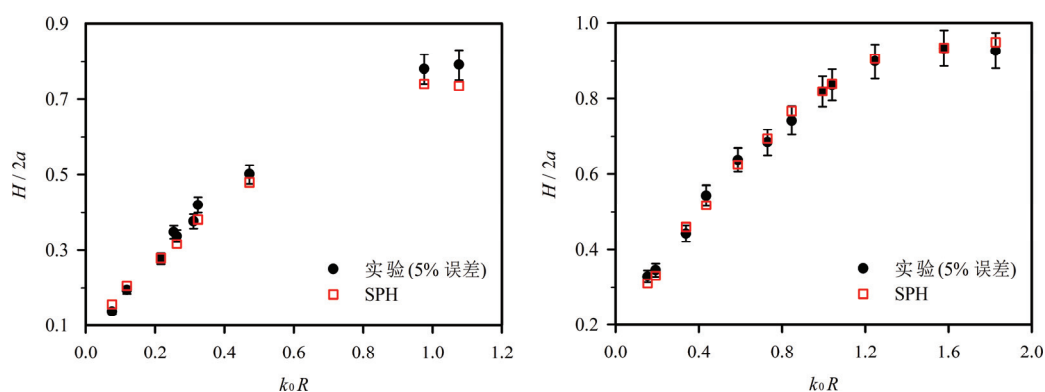


图6 数值波高与 Yu 和 Ursell^[11]实测波高的比较

5 孤立波生成质量检验

为检验所提出的孤立波制造理论，建立了图 7 所示的数值波浪水槽。此时不再设置海绵层，但水槽长度设为 3λ ，以便在水槽末端反射波浪到来前获取未受干扰的孤立波数据。初始时刻圆柱位于静水面以上，随后联立求解式(9)和式(10)计算其下落轨迹。直角坐标系 $o-xy$ 固定在水槽上游静水位处， x 轴指向波浪传播方向。距上游 1 m 外，沿波浪传播方向布置 $W_1 \sim W_5$ 五根浪高仪，相邻间距为 $\lambda/4$ 。以 W_3 浪高仪为中心布置 $V_1 \sim V_5$ 组流速计，水平方向上相邻间距为 $\lambda/8$ ，水深方向上相邻间距为 0.05 m。测试水深 $d = 0.4$ m，圆柱半径 $R = 0.8$ m，目标波高 $H = 0.08$ m，则 $R/d = 2$ 、 $H/d = 0.2$ ，在图 4 标示的有效区域内。采用 $H/\delta_p = 8$ 的粒子分辨率，计算需 87040 个粒子。

图 8(a)对 $W_1 \sim W_5$ 浪高仪采集的数值波面与 Boussinesq 一阶近似波面进行了比较，其中解析波面由式(3)计算，但经过了相位平移。可见基于圆柱入水制造的孤立波波形稳定，波高沿程衰减较小，波面历时曲线与解析解吻合良好。此外，使用 Goring^[1]或 Malek-Mohammadi 和 Testik^[3]的传统推板造波方法均会在孤立波尾部形成伴随波列，但应

用本文方法制造的孤立波其尾部水面波动微弱，即孤立波的生成质量更高。

图 8(b)给出 $t = 3.45$ s 时刻 $V_1 \sim V_5$ 流速计采集的水质点水平运动速度 u_x ，并与由下式计算的二阶近似流速^[16]进行了比较：

$$\frac{u_x}{\sqrt{gd}} = \frac{H}{d} \left[1 + \frac{H}{d} \left(1 - \frac{3y^2}{2d^2} \right) \right] \text{sech}^2(kx + \varphi) - \frac{H^2}{4d^2} \left(7 - \frac{9y^2}{d^2} \right) \text{sech}^4(kx + \varphi) \quad (24)$$

这里使用二阶 u_x 是因其能够反映出水质点水平运动速度沿水深改变的特征，而一阶 u_x 沿水深恒定。可以看到，所生成的孤立波的水质点水平运动速度也与解析解吻合较好。至于数值结果存在一定离散性的原因，推测是由于数值流体的湍流运动和数值离散误差所共同导致的。

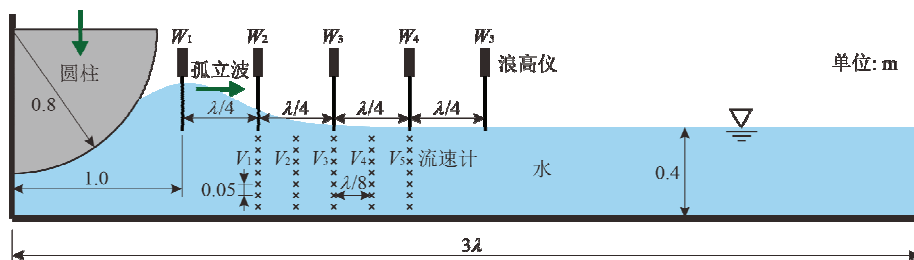


图 7 圆柱入水生成孤立波的数值模型设置

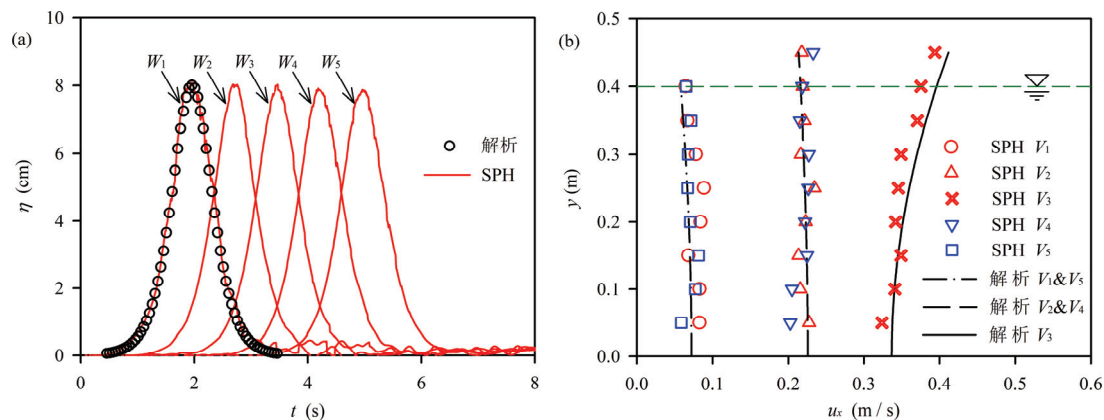


图 8 孤立波计算结果与 Boussinesq 解析解的比较：(a) 波面；(b) $t = 3.45$ s 时的水质点水平运动速度

5 结论

提出了基于圆柱入水的孤立波生成方法，并给出孤立波波高受圆柱半径的约束条件。在经过实验验证的 SPH 数值波浪水槽内检验了孤立波的生成质量。研究结果表明，基于体

积守恒原理的圆柱入水方法能够制造出波形稳定、波高可控的孤立波，且数值波面和水质点水平运动速度均与 Boussinesq 解析理论符合良好。与经典的 Goring^[1] 或 Malek-Mohammadi 和 Testik^[3] 推板造波方法相比，本文方法的波高生成范围相对较窄，最大波高仅为水深的 0.68 倍，且圆柱半径需达到水深的 4.36 倍。然而在圆柱近场区域，孤立波自生成起便达到稳定，且无明显的尾波现象，波浪质量高于推板式造波。

致谢

本文工作得到了国家自然科学基金（51709201、51679167）、中国博士后科学基金（2017M621074）的支持，在此衷心表示感谢。

参 考 文 献

- 1 Goring D G. Tsunamis - the propagation of long waves onto a shelf. California Institute of Technology, 1978.
- 2 Katell G, Eric B. Accuracy of solitary wave generation by a piston wave maker. J. Hydra. Res., 2002, 40(3): 321-331.
- 3 Malek-Mohammadi S, Testik F Y. New methodology for laboratory generation of solitary waves. J. Waterw. Port. Coast., 2010, 136(5): 286-294.
- 4 Miles J W. Solitary Waves. Annu. Rev. Fluid Mech., 1980, 12(1): 11-43.
- 5 Yim S C, Yuk D, Panizzo A, Risio M D, Liu P L-F. Numerical simulations of wave generation by a vertical plunger using RANS and SPH models. J. Waterw. Port. Coast., 2008, 134(3): 143-159.
- 6 Risio M D, Sammarco P. Analytical modeling of landslide-generated waves. J. Waterw. Port. Coast., 2008, 134(1): 53-60.
- 7 Liu M, Zhang Z. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for modeling fluid-structure interactions. Sci. China Phys. Mech., 2019, 62(8): 984701.
- 8 Zhang A-M, Sun P-N, Ming F-R, Colagrossi A. Smoothed particle hydrodynamics and its applications in fluid-structure interactions. J. Hydrodyn., 2017, 29(2): 187-216.
- 9 Gotoh H, Khayyer A. On the state-of-the-art of particle methods for coastal and ocean engineering. Coast. Eng. J., 2018, 60(1): 79-103.
- 10 Mccowan J. On the highest wave of permanent type. Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag., 1894, 38(233): 351-358.
- 11 Yu Y S, Ursell F. Surface waves generated by an oscillating circular cylinder on water of finite depth: theory and experiment. J. Fluid. Mech., 1961, 11(4): 529-551.
- 12 Monaghan J J. Simulating free surface flows with SPH. J. Comput. Phys., 1994, 110(2): 399-406.
- 13 Ren B, He M, Dong P, Wen H. Nonlinear simulations of wave-induced motions of a freely floating body using WCSPH method. Appl. Ocean Res., 2015, 50: 1-12.

- 14 Antuono M, Colagrossi A, Marrone S. Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes. *Comput. Phys. Commun.*, 2012, 183(12): 2570-2580.
- 15 Gómez-Gesteira M, Rogers B D, Crespo A J C, Dalrymple R A, Narayanaswamy M, Dominguez J M. SPHysics – development of a free-surface fluid solver – Part 1: Theory and formulations. *Comput. Geosci.*, 2012, 48: 289-299.
- 16 Lee J-J, Skjelbreia J E, Raichlen F. Measurement of velocities in solitary waves. *J. Waterw. Port. Coast. Ocean Div.*, 1982, 108(2): 200-218.

A new approach for solitary wave generation through water entry of a circular cylinder and its numerical validation

HE Ming¹, GAO Xi-feng¹, XU Wan-hai¹, REN Bing²

(1. State Key Laboratory of Hydraulic Engineering Simulation and Safety, Tianjin University, Tianjin, 300350.

Email: xuwanhai@tju.edu.cn

2. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, 116024)

Abstract: Plunger-type wavemakers are installed in some wave basins to increase wave-making efficiency and weaken re-reflect waves. However, it is still unclear how to generate a stable and controllable solitary wave by precisely governing the plunger motion. A new solitary wave-making theory is therefore proposed based on the conservation between the immersed volume of a circle cylinder and the above-water volume of a solitary wave. First, implicit equations used to calculate the cylinder motion is derived, and restraint conditions on the generated wave height due to the radius of the cylinder is given. Then, a numerical model based on the Smoothed Particle Hydrodynamics method is built. After being validated by reproducing a physical experiment in the literature, it is used to simulate the solitary wave generation through water entry of a circular cylinder. The calculated wave profile as well as the horizontal velocities of fluid particles agrees well with the analytical solutions. It indicates that the proposed wave-making theory is capable of producing high-quality solitary waves that have accurate waveforms and flow velocities without obvious trailing waves. More importantly, the solitary wave reaches steady state as soon as being excited. Accordingly, the distance between the structure and wavemaker when measuring or simulating the solitary wave-structure interaction can be shortened. Much laboratory space and computational cost will be saved.

Key words: Solitary wave; Wave-making theory; Object water entry; Numerical wave flume; Smoothed Particle Hydrodynamics.