

理解流动的相似性理论，一个模型实验解读

周晓泉¹，胡新启¹，NG How Yong²，陈日东¹

(1.四川大学 水力学与山区河流开发保护国家重点实验室，成都，610065, mail: xiaoquan_zhou@126.com 2.

Centre for Water Research, Department of Civil and Environmental Engineering, National University of
Singapore, Singapore 117576)

摘要：本文将流场的固有特性——有效体积响应曲线来研究各个比尺下的流动相似问题，在刚性段，流场是严格等效的或相似的。研究表明，在流动的驱动相似条件下，不同比尺的流动将获得相近的响应曲线，或同一个有效体积率雷诺数响应曲线。驱动相似如 Froude 数相似准则就是将原型点位在响应曲线上进行平移，如果平移后还是等效的，则原型模型流场相似，可以进行缩尺实验，否则如果不等效，则不相似，不能进行缩尺实验。一般的流动均可能有大、小固壁边界，它们可以有不同的比尺来满足整体和局部的流场相似，这样既解决了实验中出现的困惑，也为以后的同一个实验多种比尺建模提供了理论依据。

关键词：总权重；等效方法；有效体积率；相似理论；CFD

1 引言

通过对紫外消毒器的研究，发现通过欧拉—拉格朗日方法 DPM 追踪进口处投放粒子，传统的方法是流量权重，它同粒子的停留时间无关，经研究发现如果加入时间因子而成为时间—流量权重(总权重)似乎更有物理意义。

用总权重分析流场，通过拉格朗日方法追踪，都能得到有效停留时间或有效体积，它们随流量的变化形成有效体积响应曲线，它是流场的属性，且在响应曲线的刚性区域，流场是等效的，而在非刚性区域则不等效；如果应用到欧拉方法追踪上，我们可以通过 RTD 曲线获得扩散停留时间，进而最终获得表征流动扩散强弱的扩散因子。一个完整的流动现象，如果它们要相似，必须要流场的等效，还必须扩散场的等效，在污染物扩散、消毒等领域中，后者是绝不能忽略的。

一般水力学的问题，均不考虑扩散场或不关心扩散问题，仅仅考虑流场的等效即可。如果将等效方法推广到不同比尺的流动中的，那么流场的等效就是流场的相似。翻开任何一本相似理论的著作^[1]，均会有如下表述：在几何相似的空间中的两个物理现象，如果对每一个物理量在任何相对应的空间和相对应的瞬间都保持一定比例，就说这两个物理现象相似，它是相似理论的基础，也是等效方法的源头。

一般流体力学实验中常用的相似准则有 Froude 数相似、雷诺数相似、欧拉数相似等，它们常常彼此矛盾，让我们在具体的实验中无所适从，它有没有准则可循呢。

一般流体材质不变的情况下，进行比尺实验，但必须保持几何相似：

$$\text{几何比尺 } \lambda_h = \lambda_l = L_p / L_m \quad (1)$$

如果按重力相似的 Froude 数相似准则计算，则有：

$$\text{流速比尺：} \lambda_u = \lambda_l^{0.5} \quad (2)$$

如果按雷诺数相似，则有：

$$\text{流速比尺 } \lambda_u = \lambda_l^{-1} \quad (3)$$

举例说明，图 1 为一定典型的孔口出流问题，按 Froude 数相似准则，孔口将水头 H_1 变成速度头 $u = \sqrt{2gH_1}$ ，并经自由落体在 H_2 的高度达到 L_3 的位置。则很容易验证，在任何比尺上，流动都是同图 1 的运动轨迹完全相似。当孔口处是个有一定形状的流道，扣除局部损失，则可以表示为 $u = \sqrt{2g\zeta H_1}$ ，在任何比尺下，流动依然相似。

如果一般地淹没出流，也同样适用 Froude 相似原则（图 2）。但这时，如果强行要按 Reynold 数相似，则模型必须做成如图 3 样的，比尺缩小 λ_l 倍，速度就得扩大 λ_l 倍，几何相似(水位差)被彻底破坏了，这时如果强行保持几何相似，则必须在上游增加压力罐加压，如果再还原成孔口出流（图 4），则原型的流动(图 1)变成了如图 4 的出流形式，虽然满足 Reynold 数相似，但流动问题同原型比，已经相去甚远了。

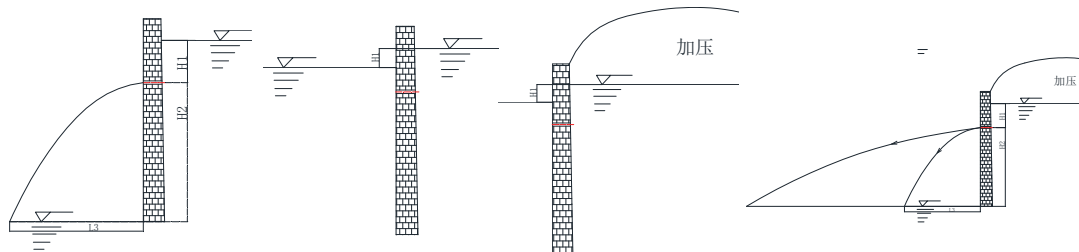


图 1 典型的孔口问题

图 2 典型的淹没出流

图 3 上游加压

图 4 还原成孔口出流

对这样的悖论，我们通常认为，流动就是因为上下游的能量差所驱使，它是驱动流动的因素，它可以是水位差(Froude 数)，可以是压力差(欧拉数)，它们均有个长度比尺量纲，均可以归于统一 Froude 数相似，是流动的决定因素；而雷诺数，则归于因为流动所产生的此生因素，它可以参与校核而不能起主要作用。

我们现可以通过已有的 CFD 技术，提前获知各种比尺条件下的流动特性，尤其是有效体积响应特性，再考虑流场如何才能相似。为此，特别设计 3 个案例，第一个为一段概化的流道(单腔体)模型，表征一个典型的腔体流道；后两个是带固壁边界的概化模型，其中第二个是外部壁面边界，表征大尺度壁面边界对流动特性的影响；第三个是流道内部有结

构筑物小壁面，表征微小的局部边界对流动特性的影响。3 个案例均简化成二维模型。

2 单腔体各种比尺条件下的流动特性

如果将一个腔体流道^[2](图 5)并入到如图 2 的流道中，便是一个概化的流道的流动模型，则可以通过计算流体力学手段再现在各种比尺下的流动特性。本模型采用连续腔体中的 2 号腔体进行，采用二维建模，所有边间层最小网格尺度 0.01mm，增长因子 1.5 倍，共 11 层，后中央网格逐步增加，最终形成 95×160 网格单元(图 6)网格尺度。

计算均采用标准的 $k-\epsilon$ 紊流模型，标准的壁函数，单一流体为水，密度 998.2kg/m^3 ，粘滞系数给定 $0.001003\text{kg/m}\cdot\text{s}$ ，流速边界条件从 1m/s 开始，给定流量进口边界条件，比尺按 10 倍进行放大缩小，流量按 $\sqrt{10}$ 倍进行放大缩小，直至整个流速范围，出口设置成 outflow，其余均壁面，质点的追踪方法采用流线法，追踪每个粒子的轨迹和停留时间，然后用总权重加权计算有效停留时间及有效体积，最终形成有效体积响应曲线。

计算结果统一采用无量纲的有效体积率来统计，并以缩小 10 倍的模型尺寸 $12\text{mm} \times 21\text{mm}$ 为标准模型 D1 记为 1:1，原型 D2 记为 10:1，扩大 10 倍 D3 记为 100:1，扩大 100 倍 D4 记为 1000:1。

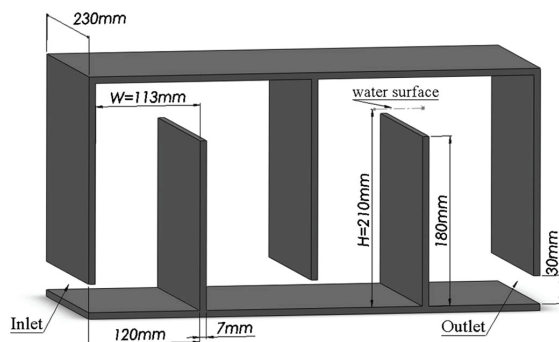


图 5 模型尺寸

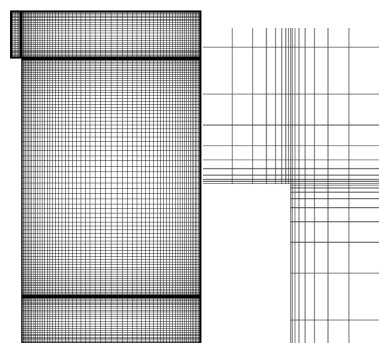


图 6 计算腔体腔体网格

缩小 10 倍的模型 D1，它的有效体积响应曲线见图 7，进口流速大于 0.0316m/s 的情况下，为流动的刚性区域，取出几个低于 0.1m/s 的典型的位置，它们的流线图分别展示于图 8。e 点位流速 0.001m/s 及以下，流线几乎没有变化，它们有同样的有效体积率，几乎可以占据整个流动域；f 点位则流速增大为 0.00316m/s ，有效体积开始减少，形成一定的回流区；g 点位流速 0.001m/s ，有效体积继续减少，回流区贯通；至 h 点位流速 0.0316m/s 有效体积达到接近最小，回流区也最大。

表 1 4 个模型计算结果

D1 模型		D2 模型		D3 模型		D4 模型	
平均速度 (m/s)	有效体积 率(R_{eff})	平均速 度, m/s	有效体积 率(R_{eff})	平均速 度, m/s	有效体积 率(R_{eff})	平均速 度, m/s	有效体积 率(R_{eff})
0.000001	0.74064	0.000001	0.7385513	0.000001	0.716436	0.0000001	0.720516
0.00001	0.738424	0.00001	0.73788685	3.16E-06	0.716022	0.000001	0.712861
3.162E-05	0.738099	3.16E-05	0.73708215	0.00001	0.730396	3.162E-06	0.666295
0.0001	0.737883	0.0001	0.73039601	3.16E-05	0.667268	0.00001	0.437057
0.0003162	0.737078	0.000316	0.66726215	0.0001	0.437055	3.162E-05	0.348241
0.001	0.730393	0.001	0.4370572	0.000316	0.348315	0.0001	0.329432
0.0017783	0.703853	0.003162	0.34830333	0.001	0.329303	0.0003162	0.341042
0.0031623	0.667257	0.01	0.32927595	0.003162	0.340967	0.001	0.357579
0.0056234	0.554383	0.031623	0.34105027	0.01	0.357321	0.0031623	0.361286
0.01	0.437056	0.1	0.35733418	0.031623	0.360985	0.01	0.357774
0.0177828	0.37779	0.316228	0.36091158	0.1	0.358914	0.0316228	0.35793
0.0316228	0.348303	0.562341	0.35888603	0.316228	0.358282	0.1	0.360466
0.0562341	0.333684	1	0.35766691	0.562341	0.359213	0.3162278	0.365324
0.1	0.329229	1.778279	0.35756202	1	0.360471	0.5623413	0.368154
0.1778279	0.332476	3.162278	0.35927491	1.778279	0.362558	1	0.369358
0.3162278	0.340921	5.623413	0.35925932	3.162278	0.365315	1.7782794	0.367217
0.5623413	0.349994	10	0.36048385	5.623413	0.368167	3.1622777	0.360875
1	0.357271	31.62278	0.36531833	10	0.369368	5.6234133	0.351674
1.7782794	0.361066	100	0.36939301	31.62278	0.360601	10	0.343462
3.1622777	0.360881	316.2278	0.36038432	100	0.343806	31.622777	0.335642
5.6234133	0.358833			316.2278	0.335621	100	0.338985
10	0.357873			1000	0.334705	316.22777	0.326495

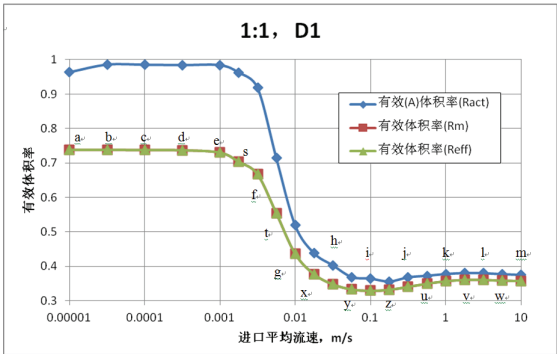


图 7 12mm×21mm 模型 D1 有效体积率响应曲线

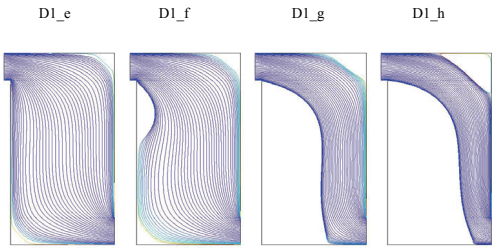


图 8 典型变动区域流线

剩下的 D2、D3、D4 模型列出各自的有效体积率响应曲线(图 9 至图 11), 有个明显的特点, 它们都有一个显著的有效体积变动区域(非刚性区), 如果将不同比尺的变动区内, 相同有效体积率的点位取出来列出流线图, 则同图 8 的完全一致。4 种比尺下的有效体积率响应曲线有共同点, 就是有个长长的刚性区域。当模型缩小 10 倍, 则非刚性区域的流速扩大 10 倍, 这个正是雷诺相似的特征, 因此各个比尺条件下的有效体积率响应曲线可以归为一个, 即有效体积率雷诺数响应曲线(图 12), 或者任意一个比尺下的有效体积率响应曲线即可。

设在模型比尺缩小 λ_l 倍, 流速则必须增大 λ_l 倍, 雷诺数相等只是流场相似的必要条件,

而不是充分条件,原因如下:①流体是水且是淹没的管流,则可能由于流速增大,水的连续性可能出现拉空的现象,或将水里带的气体给析出,甚至发生相变即汽化现象;②如果是水,开边界的流动,则流速的增加必将导致进出口峡口的局部损失增加,如图6的连续腔体中的水位会迅速下降,导致几何不相似;③如果流体是空气,则会出现可压缩性问题导致流动不相似,因此雷诺数相等不是流场相似的充分条件;④反之,如果在没有出现流体连续性问题,流场也相似的,则雷诺数相等是流场相似的必要条件。

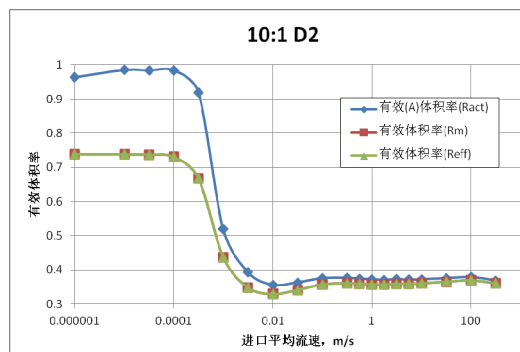


图9 120mm×210mm 模型 D2 有效体积率响应曲线

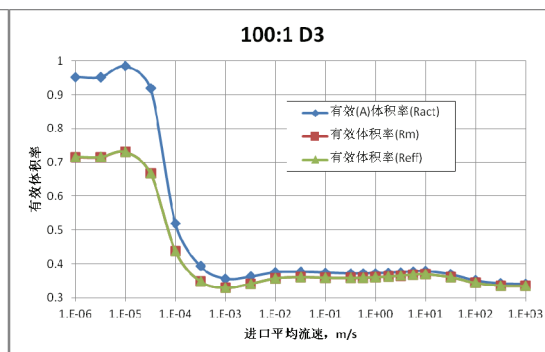


图10 1200mm×2100mm 模型 D3 有效体积率响应曲线

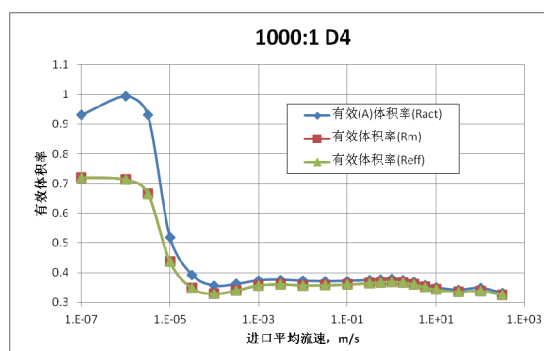


图11 12m×21m 模型 D4 的响应曲线

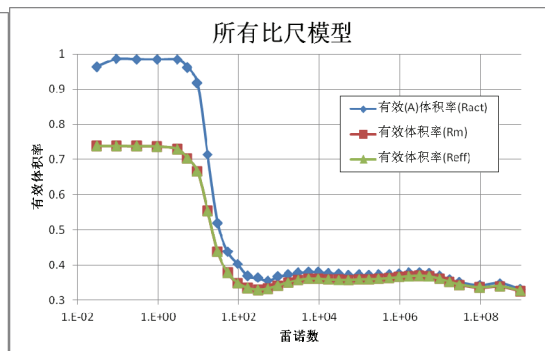


图12 腔体模型的有效体积率雷诺数响应曲线

有效体积率的非刚性区域,在比尺较大时,它远远在我们关注的流速区域之外(D4 模型为 0.000031m/s 以下),随着比尺缩小一个量级,非刚性区的速度便增加一个量级,至 D1 模型的小于 0.031m/s 以下。这个在一般的水力学模型中,非刚性区域均不影响的模型实验,除非有局部小结构(本身尺寸小)。还有在如消毒、污染物扩散等流速非常小的情况下,非刚性区域就可能要释放出来,且同时扩散效果也不能再忽略。

在任意一条有效体积率响应曲线(图7和图9至图12)上,按驱动相似的 Froude 数相似考虑,比尺缩小 λ_l 倍,速度比尺缩小 $\lambda_l^{0.5}$,则原型的有效体积率的点位将左移至 $\lambda_l^{1.5}$ 倍至的模型点位,如果这两个点位均在有效体积响应曲线的刚性段,虽然雷诺数不一致,只是在有效体积率响应曲线上发生了平移,可以称为等效平移,则流场特性依然是等效的,即

流动是相似的。

因此,对模型实验的比尺范围,根据每个具体流动的特性(有效体积率响应曲线)有个限定,如果原型点位大于刚性区域的最左边的临界点位,则可进行缩尺实验,设此点同临界位置的差异 $\lambda_{\max}^{2/3}$ 倍,则实验中可以采用的最大比尺为 $\lambda_{\max}^{2/3}$,这就是任何模型试验极限比尺。;如果小于或等于临界点,则不能进行缩尺实验。

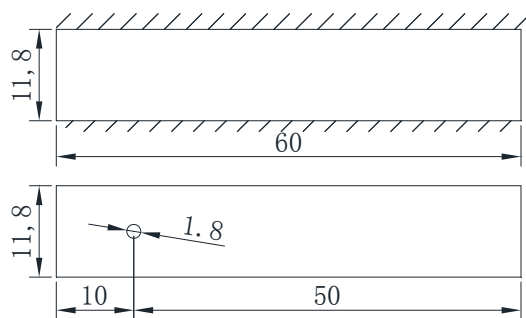


图 13 滤网边界和结构(mm)

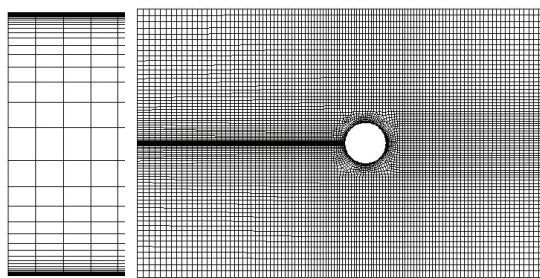


图 14 网格划分,左外部边界模型,有内部边界模型

3 不同比尺条件下,大、小固壁边界的流动特性

固壁边界模型来源于一组泵房流道实验,实验的原型上有一组旋转滤网,净空尺寸 $10 \times 10\text{mm}$,网丝直径 1.8mm 的滤网,由于实验的比尺采用 $\lambda_f=10$,实验按 Froude 相似,查不锈钢规格,采用最近似的网孔 $1 \times 1\text{mm}$,金属丝直径 0.2mm (本应 0.18mm)进行模型制作。在模型实验中,滤网前后的水位差最大有 $\sim 0.9\text{m}$ (原型尺寸),远远大于 0.3m ,解释不了原因,只能解释滤网的阻塞等外部因素。项目验收时,专家有推荐模型中滤网尺寸用原型尺寸滤网来代替的方案,后采用直接拆掉滤网重做实验,滤网拆除后滤网位置前后水位差最大才 0.2m 左右,同实际比较符合,因水位差大于 0.3m ,旋转滤网便自动开启清网。

二维固壁边界概化为外边界及滤网丝内边界模型见图 13,按有效体积网格划分原则,壁面及对称面边界层网格最小 0.001mm ,增长因子 1.5 ,共 11 层,其余逐渐增加尺度,形成的网格见图 14。

3.1 外边界模型 A

按图 13 尺寸为标准尺寸定义, A2 为尺寸缩小 10 倍的模型, A3 为标准模型, A4 为放大 10 倍模型, A5 为放大 100 倍, A6 为放大 1000 倍。以此对它们进行有效体积率的计算。进出口如果均匀流给定边界,即采用周期边界并给定流量,计算的结果见图 15 至图 17,其中横向速度分布变化点位在有效体积率变动点位完全一致。因此相同的速度分布对应相同的有效体积率,并对应相同的雷诺数。在所有的比尺模型中,可以将高于 0.974 的有效体积率定义为刚性区域,它们有近似相同的断面流速分布,也近似等效。

如果更一般的情况下,进口采用流量进口,出口采用 Outflow,则有 AW 为原型 $1:1$ 模

型, AW1 为放大 100 倍的 100:1 模型。它们的有效体积率响应曲线分别见图 18 和图 19。边界条件同周期边界的虽然不一致,但是判别刚性区域的依据是一致的,将有效体积率大于 0.985 的区间定义为刚性区间,刚性区间范围同周期边界一致。

所以仍可以按驱动相似的 Froude 数相似,作等效平移,只要平移后的位置仍然在刚性区域内,就可以等效,流场就可以相似。

此模型将有效体积率同断面流速分布挂钩,通过它们判断刚性区域是完全一致的。

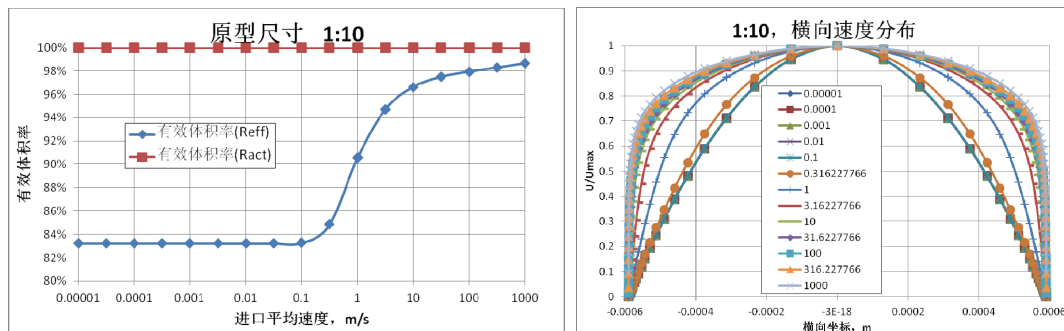


图 15 缩小 10 倍的 A2 模型的有效体积率响应曲线和横向流速分布

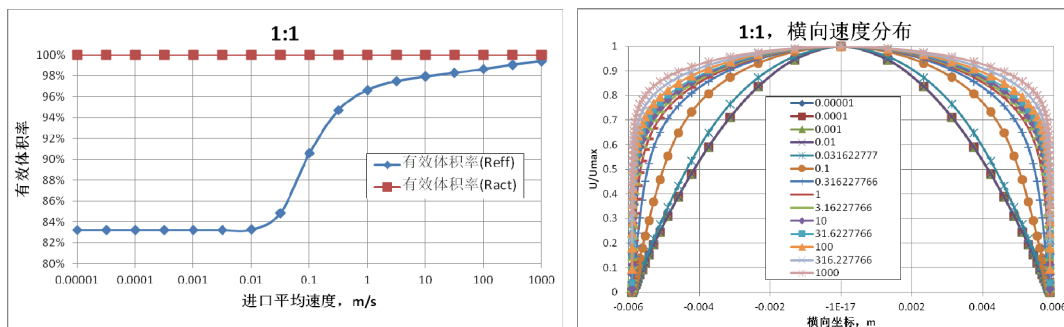


图 16 原型 A3 模型的有效体积率响应曲线和横向流速分布

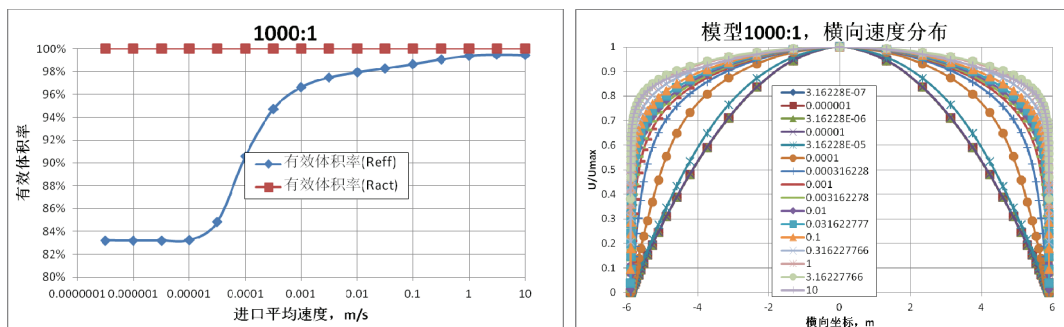


图 17 放大 1000 倍的 A6 模型的有效体积率响应曲线和横向流速分布

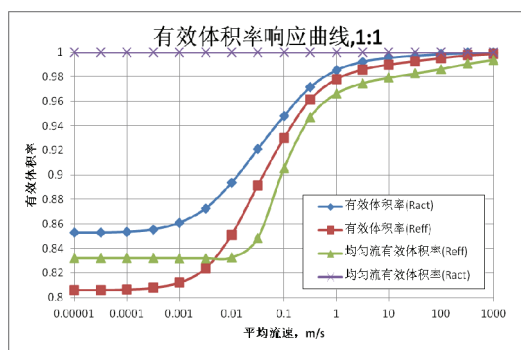


图 18 AW 模型有效体积率响应曲线

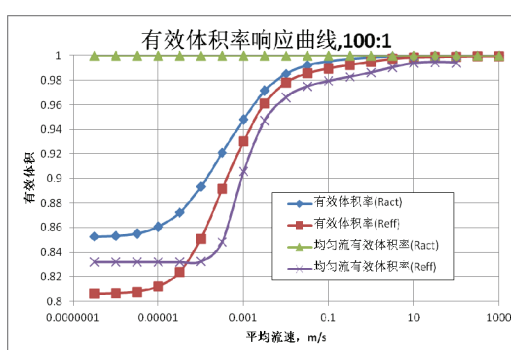


图 19 AW1 模型有效体积率响应曲线

3.2 内边界模型 B

内部边界, 将缩小 10 倍 B1 定义为 1:10 模型, 原型 B2 定义为标准模型, 它们的有效体积率响应曲线见图 21 和图 22, 其中有效体积率降到最低点 j 位后有反弹, j 位就是层流尾迹最大的点位(图 20), 如果再增加流速, 将产生层流向湍流的过渡, 并产生涡旋及脱离, 严重时会发生水中气体析出或汽化现象, j 位后的有效体积均必将继续减少, 为最可能的预估曲线(图 20~21), 而不是计算中 j 点后的有效体积率的反弹(只因本单流体模型不适合计算这个过渡), 但流动尾迹(图 20)趋势在 j 点位后还是可以认为是相近。当然如果采用非恒定流计算, j 点位后的有效体积率也许也许更接近预测的, 但这不影响对刚性区域的判断。

根据模型实验数据, 在百年高水位下, 流经滤网的流速在 0.05~0.06m/s 之间, 97%低水位下流速在 0.085~0.105m/s 之间, 如果换算成原型则高水位在 0.158~0.192m/s, 低水位在 0.231~0.235m/s 之间。查原型 B2 的有效体积率响应曲线(图 21), 原型流速点位就在刚性区域的下限附近(如果将 0.1m/s 以上流速定义为刚性区域), 这里根本没有空间实施等效平移, k 位的将向左平移 $\lambda_l^{1.5}$ 倍(1.5 个 λ_l 量级)至 h 位, 相当于流线由图 21 的 j (同 k 一致)平移到 h , 这正是实验中所遇到的, 因为流场的不相似导致实验结果不准确。

如果将 k 位(原型对应流速 0.1m/s 处)的数据, 内部边界网尺寸不变(滤网不缩小比尺), 则根据大边界定义的比尺 λ_l 不变, 而速度比尺仍然缩小 $\lambda_l^{0.5}$, 则 k 位可以等效平移至 j 位, 如果 j 位以上都可以算刚性区域的话, 则还是等效的。这点就是评审专家推荐采用原型网尺寸的理论依据, 只需等效平移 0.5 个 λ_l 量级, 如果还有刚性区域空间的话。

当然如果 k 位就在非刚性区域或临界点附近, 毕竟具体流场不明, 可能牵涉到相变(要有单相变成双相流, 水汽两相流)。这时要做到局部等效也是完全可以的, 方法如下, 大边界比尺按 λ_l 缩小, 速度比尺按 $\lambda_l^{0.5}$ 缩小, 但局部小结构(网丝)的比尺按 $\lambda_l^{0.5}$ 计, 即放大 $\lambda_l^{0.5}$ 倍(滤网孔按 31.6×31.6mm 计, 网丝直径 5.69mm), 这样就可以严格做到过网流动同原型相似, 即在响应曲线上未将 k 位作任何平移, 则流场相似, 条件是局部小尺度比整体流动域小非常多, 局部的存在不影响整个大的流场, 只能影响局部流场。

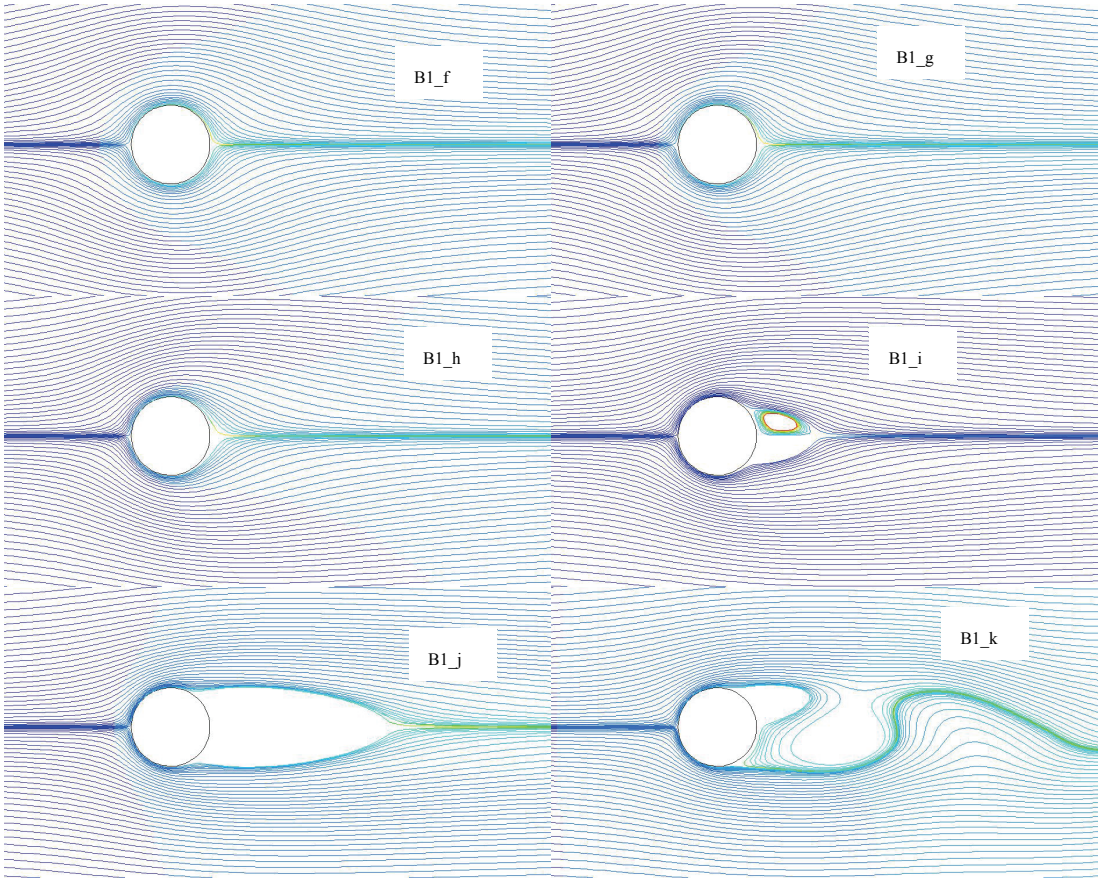


图 20 缩小 10 倍 B1 模型点位局部流线

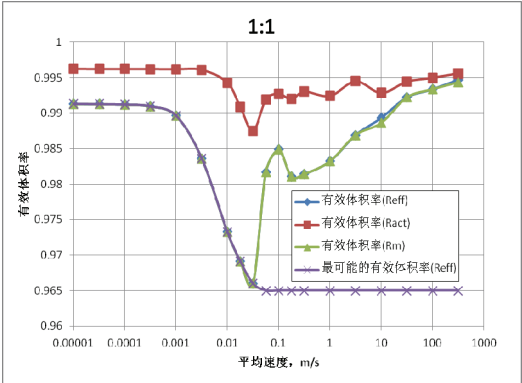


图 21 B2 模型有效体积率响应曲线

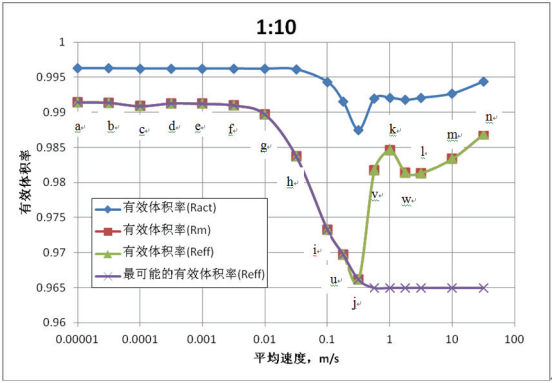


图 22 B1 模型有效体积率响应曲线

4 结论

(1) 通过引入总权重, 获得各种比尺条件下的 3 种概化模型的有效体积率响应曲线。通过研读, 相同的有效体积率对应相同的流线经过的区域、相同的断面流速分布、相同的雷诺数、相同的尾迹, 因此有效体积率是个判断流场流态的最为有效的工具, 它展开后的响应曲线, 将简单的相似准则由点相似扩展成一个刚性区域相似。

(2) 通过分析, 模型实验中实应优先尊重驱动相似准则, 一般为 Froude 数相似, 这相当于在有效体积率响应曲线上向左平移 $\lambda_l^{1.5}$ 倍, 如果是等效平移, 则流动严格相似, 如果不能等效平移, 则不能进行缩尺的模型实验。

(3) 流动中同时有大小各种固壁情况下, 大、小边界的比尺可以不一致, 必须先满足整体的流场相似前提下, 同时在局部流场也可以相似。这样一举解决了实验中出现的困惑, 为同一个模型中, 出现几种比尺的建模提供了理论依据。

(4) 有效体积率响应曲线是判断各种比尺条件下流场是否相似的工具, 它应优于雷诺数相似, 且可以完全替代雷诺数准则。

参 考 文 献

- 1 程尚模, 季中. 相似理论及其在热工和化工中的应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.
- 2 Zhang J, Tejada-Martínez, A. E, Zhang Q. Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulation of the Flow and Tracer Transport in a Multichambered Ozone Contactor[J]. Journal of Environmental Engineering, 2013, 139(3):450-454.

Understand the similarity theory of flow - interpretation of a model experiments

ZHOU Xiao-quan¹, HU Xin-qi¹, NG How Yong², CHEN Ri-dong¹

(1. State Key Laboratory of Hydrodynamics and Mountain River Engineer, Chengdu, 610065.

Email: xiaoquan_zhou@126.com, 2. Centre for Water Research, Department of Civil and Environmental Engineering, National University of Singapore, Singapore 117576)

Abstract: In this paper, the inherent characteristics of the flow field, the effective volume response curves, are used to study the flow similarity at different scales. In the rigid section, the flow field is strictly equivalent or similar. The research shows that under driving similarity, similar effective volume ratio response curves or a single effective volume ratio - Reynolds

number response curve can be obtained for different scales of flow. Driving similarity, such as Froude number similarity criterion, is to translate the prototype point on the response curve. If it is equivalent after translation, the flow fields of the prototype and model are similar, and scaling experiments can be carried out. Otherwise, if it is not equivalent, scaling experiments can not be carried out. Generally speaking, there may be large and small solid wall boundaries, which can satisfy the similarity of the whole and local flow fields with different scales. This not only solves the confusion in the experiment, but also provides a theoretical basis for the multi-scale modeling of the same experiment.

Key words: Total Scale; Equivalent Method; Effective Volume Ratio; Similarity Theory; CFD