

水平振动斜齿平板上的液滴运动

李海龙, 朱曦, 丁航

(中国科学技术大学, 合肥, 230026, Email: hding@ustc.edu.cn)

摘要: 本文研究了三维液滴在水平振动的斜齿平板上的运动, 并通过数值模拟和理论分析揭示了液滴定向运动的力学机理。附着在平板上的液滴由于平板的水平振动而进行周期性运动, 虽然平板的振动是对称的, 但平板表面不对称的斜齿带来了对称破缺效应, 因而液滴会发生定向移动。本文将斜齿平板简化为沿壁面方向不对称的润湿特性, 使用带有移动接触线模型的扩散界面方法进行了三维数值模拟。依据液滴平均速度和表面张力波与移动接触线的相互作用, 将液滴运动区分成两种模态。建立了包含液滴接触角迟滞效应的尺度率模型, 该模型预测了液滴运动的模态转换, 定量揭示了液滴平均速度与液滴的体积、粘性系数、表面张力和振动幅值等因素的依赖关系。数值模拟的结果验证了理论预测。

关键词: 液滴振动; 三维数值模拟; 多相流动; 移动接触线; 液滴操控

1 引言

液滴操控在生物微阵列、微芯片实验、除雾和液滴收集等领域有重要的应用价值^{[1][2]}。操纵液滴的方法可以分为两类: 微管道中的两相流体运动和液滴附着在平板运动。对于后者来说, 接触角迟滞的存在会阻碍液滴的运动, 但这可以通过液滴振动克服^[3]。液滴振动还是一个经典的流体力学问题, Rayleigh^[5]和 Kelvin^[4]最早分析了自由液滴的振动模态。之后, 微重力情况下固着在平板上的液滴的受迫振动也受到了关注, 但仅限于接触线固定的情况^[6]。最近越来越多的研究开始关注液滴附着在振动平板上的运动, Brunet, Eggers 等人^[7]实验报道了附着在倾斜平板上的液滴, 当平板在竖直方向振动时, 液滴会沿着平板向上爬升而不是因重力的影响而下滑。Noblin 等人^[8]实验探究了同时在水平和垂直方向振动的平板上液滴的运动, 他们的模型指出液滴定向移动速度与两个方向振动的相位差有关, 通过改变平板两个方向上振动的幅值, 频率和相位差即可实现液滴的定向输运。Ding 等^[9]通过三维数值模拟对液滴在倾斜平板上爬升这一反常现象进行了理论探究, 他们发现液滴非对称的润湿面积导致了液滴的定向移动。Savva 等人^[10]研究了二维液滴在小振幅值振动的平板上的运动, 理论预测了二维液滴的平均移动速度。

还有很多工作尝试如何通过平板的振动实现液滴的定向输运。Danie^[11]指出在没有外力的情况下, 仅通过平板的不对称振动即可实现液滴的定向移动。Duncombe^[12]探究了液滴在

带有纹理结构平板上的运动，纹理结构使液滴沿着平板向不同方向运动时，具有不同的润湿特性。当平板在水平方向振动时，由于毛细力产生对称破缺而实现了液滴的定向输运。他们还进一步探究了液滴体积和振动的频率、幅值对液滴定向移动的影响。

本文通过数值模拟和理论结合的方式对液滴在水平振动斜齿平板上的运动进行探究，旨在定量的揭示平板振动的幅值，液滴的体积、粘性和表面张力等因素对液滴定向输运的影响。我们首次通过三维的直接数值模拟对该问题进行了研究，数值模拟的结果表明，液滴总是向接触角迟滞较小的方向运动，并且增加液滴的雷诺数或减小韦伯数均可以提高液滴定向输运的速度。本文定义了液滴运动的两种模态，即速度较大的谐振模态和速度较小的迟滞模态，通过结合液滴表面张力波的传播规律和表面张力波与移动接触线的相互作用关系，分析了物理参数对液滴定向运输的速度的影响以及模态转变的规律。最后，本文提出了一个简单的力学模型，以定量解释模态转变的边界和液滴定向输运的速度和韦伯数及雷诺数的关联。

2 数值模型

本文结合扩散界面模型求解三维Navier-Stokes方程模拟液滴在振动的平板上的运动。该扩散界面模型可以求解具有大密度比和大粘性比的两相流动问题^[13]。在扩散界面模型中，使用体积分数 C 区分液体和气体，气液两相界面由一定厚度网格代替。体积分数 C 的控制方程为Cahn-Hilliard方程，

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}C) = \frac{1}{Pe} \nabla^2 \psi \quad (1)$$

其中化学势 ψ 定义为：

$$\psi = C^3 - 1.5C^2 + 0.5C - Cn^2 \nabla^2 C \quad (2)$$

Cn 即Cahn数代表无量纲的界面厚度。如果用 $0.05 < C < 0.95$ 表征界面，那么界面的厚度约为 $8.26Cn$ 。本文中固定 $Cn = 0.75\Delta x$ ，其中 Δx 为网格间距，Peclet数定义为 $Pe = 0.9/Cn$ 。在扩散界面模型中，表面张力为 $f_s = 6\sqrt{2}\psi\nabla C/Cn$ ，并以体积力的形式添加到控制方程中。

为了便于计算，如图1所示，本文将坐标轴固定在平板上，平板沿着水平方向的简谐振动等效为施加于流场上的正弦形式的振动力 $f = a \cdot \sin(2\pi T \cdot t)\mathbf{e}_x$ ，其中， a 为等效的水平振动力的振幅， T 为振动力的周期， $\mathbf{e}_x$ 代表振动力的方向。流场控制方程为三维Navier-Stokes方程。其无量纲形式为，

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \frac{\mathbf{f}_s}{We} - \rho \sin(2\pi St \cdot t)\mathbf{e}_x \quad (3)$$

其中 $\rho = C + \lambda_\rho (1 - C)$ 和 $\mu = C + \lambda_\mu (1 - C)$ 分别代表无量纲密度和动力学粘性系数, λ_ρ 和 λ_μ 分别为空气与液滴的密度比和粘性系数比, 本文分别固定为 0.001 和 0.01。特征长度和特征速度分别为, $L = \sqrt[3]{V}$ 和 $U = \sqrt{aL}$, 其中 V 为液滴的体积, a 为水平振荡力的振幅。相应的无量纲参数为雷诺数 $Re = \rho_L \sqrt{a} L^{3/2} / \mu_L$, 韦伯数 $We = \rho_L a L^2 / \sigma$, 斯特哈尔数 $St = \sqrt{L/aT^2}$ 。其中, ρ_L , μ_L 和 σ 分别为液滴的密度, 粘性系数和表面张力系数。

本文采用基于几何形式的接触角模型施加带有接触角迟滞的润湿条件^[14], 在这一模型中, 润湿条件被等效为流体相体积分数的边界条件, 使用如下方程描述,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla C = -\tan(\pi/2 - \theta) |\nabla C - (\mathbf{n} \cdot \nabla C) \mathbf{n}| \quad (4)$$

并采用如下过程实施接触角迟滞: 在每个时间步长上, 首先确定当地的实时接触角, 如果该接触角在规定的前进接触角和后退接触角范围内, 则该角度不变, 否则, 按照给定的前进接触角或后退接触角修改当地的接触角。

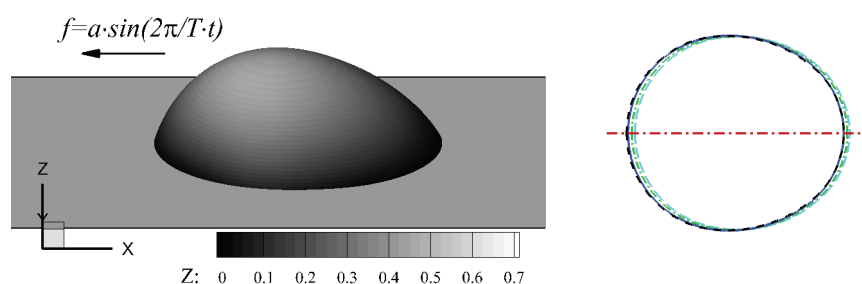


图 1 左图: 液滴和平板系统示意图。液滴附着在水平平板上, 当参考系固定在平板上时, 平板的振动等效为对流场施加水平的简谐力。右图: 接触线处的网格收敛性验证, $Re=40$, $We=2$ 。使用均匀网格计算。

其中, 短划线为 $\Delta x=1/90$, 实线为 $\Delta x=1/70$, 点划线为 $\Delta x=1/60$, 双点划线为 $\Delta x=1/50$ 。

由于问题的对称性, 本文仅计算液滴的一半, 计算域的大小为 $6*1.5*1.5$, 采用均匀网格计算, 液滴移动的前后边界采用周期边界条件, 其他边界为远场边界条件。图 1. (右)展示了移动接触线的位置随网格收敛的情况 ($\Delta x=1/50, 1/60, 1/70, 1/90$)。结果表明, $\Delta x=1/70, 1/90$ 的计算结果几乎重合。如不加说明, 本文的计算结果均使用 $\Delta x=1/70$ 的均匀网格进行计算。如图 2. 展示了本文算法计算结果与 Brunet 等^[7]实验的对比, 液滴在不同相位时的数值模拟结果均与实验的结果符合较好, 这进一步验证了本文的算法的有效性。

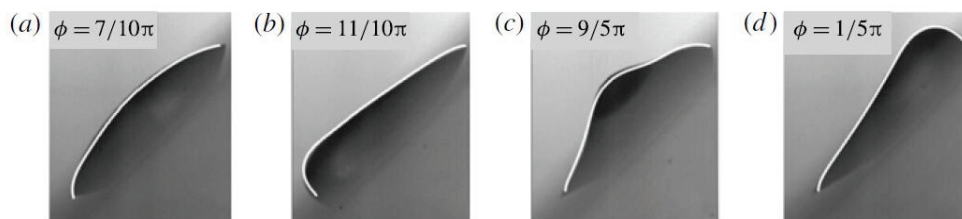


图 2 数值模拟与实验结果对比图。其中白色实线为数值模拟结果，无量纲参数为 $Re=30.9$, $We=9.17$, $St=17.8$, $\theta_a=77^\circ$, $\theta_r=44^\circ$, 平板倾角为 45° 。背景为 Brunet et al. (2007)^[17] 的实验结果。

2 结果和讨论

2.1 液滴运动动力学

如图 1（左）所示，液滴附着在水平且具有斜齿表面的平板上，平板在水平方向振动。平板斜齿被简化为沿着振动方向不对称的润湿特性，即液滴向 x 轴正方向运动时，前进接触角 $\theta_{a1} = 80^\circ$ ，后退接触角 $\theta_r = 60^\circ$ ，液滴向 x 轴负方向运动时，前进和后退接触角分别为 $\theta_{a2} = 70^\circ$, $\theta_r = 60^\circ$ 。为了简便计算，本文将坐标轴固定在平板上，从而将平板的水平

振动等效为施加于流场的沿水平方向的简谐形式外激励，本文将外激励无量纲频率固定为 $St = 0.2$ 。数值模拟结果表明，在对称的外激励作用下，沿外激励力方向不对称的润湿特性导致液滴系统的对称破缺，使液滴将向接触角迟滞较小的方向定向移动，且定向运输的方向与液滴粘性等物性参数以及振动的幅值无关。

当 $We > 10$ 时且 Re 较大时，液滴的惯性力大于粘性力和毛细力，初始演化比较剧烈，接触线上方的液体的移动速度可能大于接触线移动的速度而导致润湿转换。本文不考虑出现润湿转换的情况，因而研究参数范围为 $We < 10$, $Re < 200$ 。

液滴定向运动的速度定义为一个周期内液滴质心位置的变化和周期的比值，即 $U_m = \Delta x / T$ 。图 3. 展示了 $Re=100, We=3$ 和 $We=7$ 时液滴中轴线上剖面图，可以看到，液滴形态呈现两种典型的模态，分别记为谐振模态和迟滞模态。对平均速度的进一步统计表明：在谐振模态中，液滴表面变形不明显，液滴的平均速度较大随 We 变化敏感。在迟滞模态中，液滴表面变形剧烈，平均速度较小。这两种模态的差别还体现在接触线的运动上，图 4. 展示了 $Re=100, We=3$ 和 $We=7$ 时，液滴运动方向前后两端接触线位置在三个振动周期内随时间的变化关系。在迟滞模态中，液滴前后两端的接触线运动存在相位差，且前后两端的接触线运动形式存在一定的差异。由于处于谐振模态的液滴定向移动的速度明显高

于迟滞模态，操纵液滴在谐振模态运动，对于提高液滴定向输运效率有重要的意义。

图 4. 中箭头的长度代表接触线回缩的长度。为了定量的区分两种模态，本文定义，如果两端的接触线回缩长度之差小于 0.01，则为迟滞模态，否则为谐振模态。图 6. 展示了两种模态的相图，可以看出，这种定义方式较好的区分了两种运动的模态。

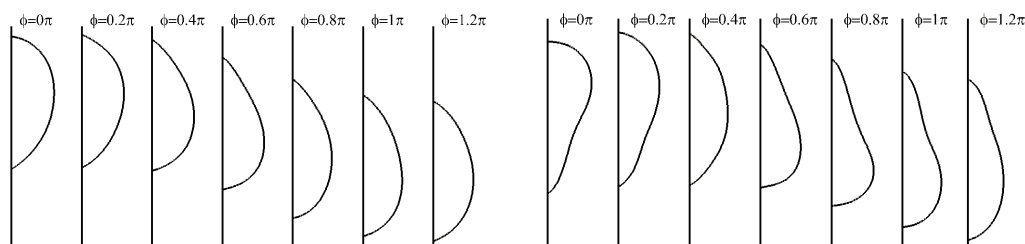


图 3 $y=0$ 处的液滴截面上表面张力波传播图。左图：无量纲参数为 $Re=100, We=3$ ，右图：无量纲参数为 $Re=100, We=7$ 。

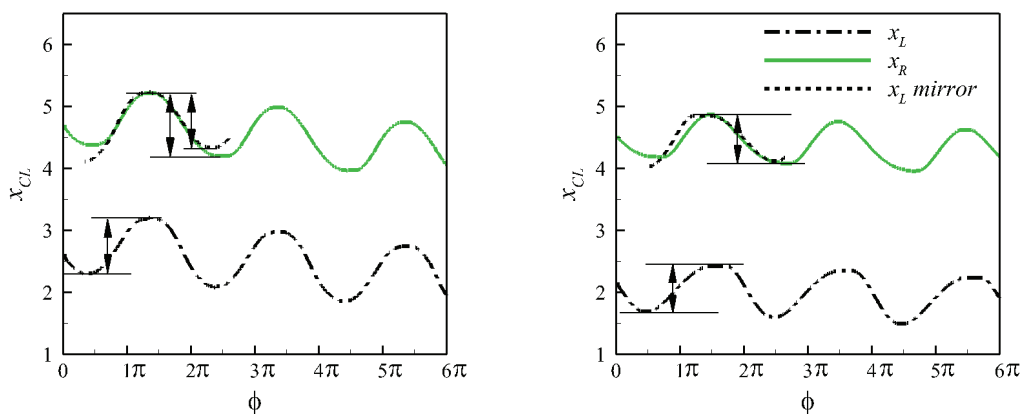


图 4 液滴前后两端接触线位置随时间的演化图。左图 $Re=100, We=3$ ，右图参数为 $Re=100, We=7$ 。其中，点划线和实线代表液滴沿运动方向两端接触线位置，箭头长度表示接触线回缩的距离。

当不考虑粘性对表面张力波的影响时，而表面张力波传播的惯性-毛细波的特征速度是 $u_0 = \sqrt{\sigma/\rho L}$ ，其无量纲形式为 $c = \sqrt{1/We}$ 。图 5. 给出了 $Re=40$ 时表面张力波传播速度和 We 数的关系。当 We 较小时，液滴变形不明显，表面张力波不容易统计，这里仅给出部分 We 时的信息。且本文表面张力波的速度根据表面张力波起始时刻信息和表面张力波到达接触线附近时刻的信息计算。从图像可以看出，数值模拟的结果基本符合理论预测。当表面张力波的波峰从一侧产生并传递到移动接触线附近时，将与移动接触线相互作用，促进移动接触线移动，最后从移动接触线处返回另一侧。当液滴处于迟滞模态时，波速小，振动

产生的表面张力波不容易从液滴的一端传递到液滴的另外一端，表面张力波对接触线运动的促进作用不明显。但在谐振模态中，表面张力波很容易的从一端传递到另外一端促进移动接触线运动，左右两侧的接触线运动更加同步。因而迟滞模态的平均速度明显小于谐振模态的平均速度。

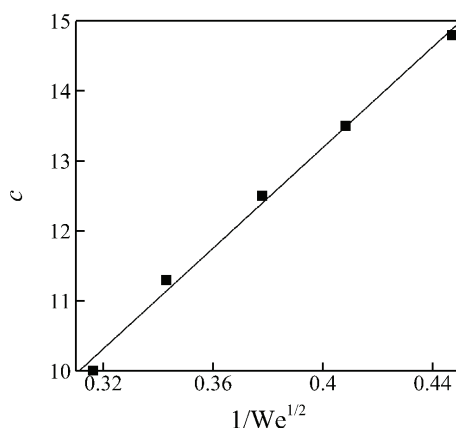


图5 液滴表面张力波传播速度和 We 数的关系, $Re=40$, $St=0.2$ 。

2.2 液滴运动模态转换机理

为了解释液滴运动的动力学行为，需要分析液滴受到的作用力。液滴运动时，受到作用力来自于平板（平板粘性力，移动接触线附近的毛细力和平板振动等效来的外激励）和空气（空气的摩擦力）。取液滴为系统，其受力平衡关系为，

$$\int_{\Omega} \frac{Du}{Dt} dV = \frac{1}{Re} \left(\int_{S_l} (\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{T}) dS + \int_{S_{cl}} (\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{T}) dS \right) + \frac{1}{We} \int_{CL} \boldsymbol{\tau} dl + \int_{\Omega} \sin(\phi) dl \quad (5)$$

其中，左端为液滴运动的非定常项。右端项中， $\mathbf{T}$ 代表应力张量， $\boldsymbol{\tau}$ 代表由于表面张力的存在而在接触线附近形成的毛细力，后面称该积分项为毛细力。上式为一般情况下的受力关系，下面我们将对各个力在一个振动周期内的平均值进行分析。

当液滴的棘齿运动处于平衡状态时，其定向移动速度不会发生变化，即液滴一个周期内平均速度在不同的运动周期保持不变。因此，对上式取周期平均，则左端的非定常项为零。并且，简谐形式的外激励在一周期内的平均值等于零。此外，由于空气的密度和粘性系数相对于液滴较小，因而空气和液滴之间的粘性力也可以忽略。

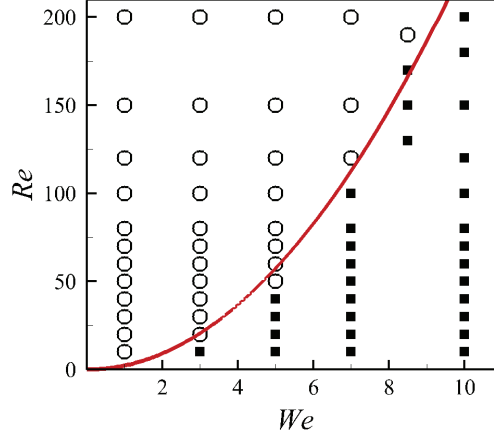


图6 液滴运动模态图。其中，空心符号代表谐振模态，实心符号代表迟滞模态。实线代表理论预测的液滴模态转化边界，其中 $k=1.52$ 。

液滴与平板之间的在一个周期内平均的粘性力可以用下式估计，

$$f_v \propto \frac{u_c}{Re h} S \quad (6)$$

其中， u_c 代表液滴的体平均速度， S 代表液滴与平板的平均润湿面积， h 为水平振动液滴的粘性剪切层厚度， h 在Stokes长度的量级，即 $h \propto 1/\sqrt{Re}$ ，带入(6)式得，

$$f_v \propto \frac{u_c}{\sqrt{Re}} S \quad (7)$$

周期平均毛细力项可以用下式估计，

$$f_s = St \int_T \frac{1}{We_{CL}} \int \tau dl dt \propto - \frac{W_m (\cos(\theta_{a2}) - \cos(\theta_{a1}))}{2We} \quad (8)$$

其中， W_m 代表液滴的平均宽度，平均宽度在不同的 We 和 Re 时变化不大，假定为常数。

将(7)和(8)式带入(5)式，整理得，

$$\sqrt{Re} = \frac{u_c S}{W_m (\cos(\theta_{a2}) - \cos(\theta_{a1}))} We = k \cdot We \quad (9)$$

(9) 式为在给定液滴质心速度时 Re 和 We 的关系，其中 k 为拟合参数。事实上，当 $u_c = 0.065$ ， $S = \pi$ ， $W_m = 1.6$ 时， $k = 1.52$ ，理论公式结果对应于图6. 中的实线。可以

看出, 该理论较好的区分两种液滴运动的模态。在本文研究的参数范围内, 增加 Re 或者减小 We 促使液滴的运动模式从迟滞模态进入谐振模态, 从而增加液滴的定向移动速度。

3 结论

本文通过三维数值模拟探究了液滴在水平振动斜齿平板上的棘齿运动。液滴的定向输运由沿振动方向不对称的润湿特性产生, 更具体的, 这种不对称体现为在水-空气界面和平板的接触线处的毛细力在两个运动方向上的不对称。虽然液滴定向输运的方向与振动的幅值、液滴体积、粘性、表面张力等因素无关, 但是这些物理参数会显著的影响液滴定向输运的平均速度。本文建立了一个简单的尺度率模型, 将振动的幅值、液滴体积、粘性和表面张力等因素与液滴的定向移动速度联系起来, 该模型成功预测了液滴两种模态的转换边界, 数值模拟结果也验证了模型的预测。本文对液滴振动的动力学行为进行了解释, 对于使用振动的方法来操纵液滴有一定的指导意义。本文的分析讨论都是在固定的振动频率下得到的, 频率对液滴的平均运输速度的影响还有待进一步探究。

参 考 文 献

- 1 Krupenkin, T. N., Taylor, J. A., Schneider, T. M. & Yang, S. From rolling ball to complete wetting: The dynamic tuning of liquid on nanostructured surfaces. *Langmuir* 20, 3824-3827 (2004).
- 2 Wang, J. Z., Zheng, Z. H., Li, H. W., Huck, W. T. S. & Sirringhaus, H. Dewetting of conducting polymer inkjet droplets on patterned surfaces. *Nature Mater.* 3, 171-176 (2004)
- 3 Manor, O. (2014). "Diminution of contact angle hysteresis under the influence of an oscillating force." *Langmuir* 30(23): 6841-6845.
- 4 KELVIN, LORD 1863 Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 153, 583-616.
- 5 RAYLEIGH, LORD 1879 On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. Lond.* 29, 71 - 97.
- 6 STRANI, M. & SABETTA, F. 1984 Free vibrations of a drop in partial contact with solid support. *J. Fluid Mech.* 141, 233-247.
- 7 BRUNET, P., EGGERS, J. & DEEGAN, R. D. 2007 Vibration-induced climbing of drops. *Phys. Rev. Lett.* 99, 144501.
- 8 Noblin, X., et al. (2009). "Ratchet like motion of a shaken drop." *Physical Review Letters* 102(19): 194504.
- 9 Ding, H., et al. (2018). "Ratchet mechanism of drops climbing a vibrated oblique plate." *Journal of Fluid Mechanics* 835.
- 10 Savva, N. and S. Kalliadasis (2014). "Low-frequency vibrations of two-dimensional droplets on heterogeneous substrates." *Journal of Fluid Mechanics* 754: 515-549.

- 11 Daniel, S., et al. (2005). "Vibration-actuated drop motion on surfaces for batch microfluidic processes." *Langmuir* 21(9): 4240-4248.
- 12 Duncombe, T. A., et al. (2012). "Controlling liquid drops with texture ratchets." *Advanced Materials* 24(12) 1545-1550.
- 13 DING, H., SPELT, P. D. M. & SHU, C. 2007 Diffuse interface model for incompressible two-phase flows with large density ratios. *J. Comput. Phys.* 226 , 2078–2095.
- 14 DING, H. & SPELT, P. D. M. 2007b Wetting condition in diffuse interface simulations of contact line motion. *Phys. Rev. E* 75, 046708.

The motion of droplet on a lateral vibrated plate with skewed texture pattern

LI Hai-long, ZHU Xi, DING Hang

(University of Science and Technology of China, Hefei, 230022. Email: hding@ustc.edu.cn)

Abstract: In this paper, we investigate the mechanism of drops motion on a lateral vibrated plate with skewed texture pattern using the numerical simulations and theoretical analysis. Sessile droplet will move period due to the lateral vibration of the plate. Although the vibration of the plate is symmetry, the droplet will move along one direction due to the symmetry breaking of the wetting condition, which is introduced by the skewed texture pattern. In this paper, the skewed texture pattern is simply to asymmetrical wetting condition and the three-dimensional diffuse interface method with a moving contact line model is used to simulate this problem. The flow of the droplet can be divided into two flow regimes according to the mean drift velocity and the interaction between the capillary wave and moving contact line. Then we propose the scaling models to interpret the critical condition for the two flow regimes, accounting for the contact angle hysteresis. The model is shown to provide a good correlation among the mean drift velocity and the vibration amplitude, the volume, surfaces tension and viscosity of the droplet.

Key words: Droplet vibration; 3D numerical simulation; Moving contact line; Droplet control